Verso la forma normale di Birkhoff.

Stiamo considerando

$$H(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}\left(x_j^2 + y_j^2\right) + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(\underline{x},\underline{y})$$

dove $f_\ell(\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{P}_\ell$, cioè $f_\ell(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{|\underline{j}|+|\underline{m}|=\ell} c_{\underline{j},\underline{m}}\, \underline{x}^{\underline{j}} \cdot \underline{y}^{\underline{m}}$

dove $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$), $c_{\underline{j},\underline{m}} \in \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) e

Forma normale di Birkhoff

 provviamo a rimuovere la dipendenza dagli angoli

1. con le serie di Lie

- rimuovendo i termini perturbativi a gradi via via crescenti.

nelle variabili complesse significa avere la dipendenza solo da $z_j(i\bar{z}_j)$

Introduciamo $\forall j$ $z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + i y_j)$ dove $(\underline{x}, \underline{y})$ sono coord. can.

momenti coord.

Oss.: $\begin{cases} z_j = \dfrac{\sqrt{\cancel{2} I_j}}{\cancel{\sqrt{2}}} \left(\cos\varphi_j + i \sin\varphi_j\right) = \sqrt{I_j}\, e^{i\varphi_j} \\ i\left(\bar{z}_j\right) = i \sqrt{I_j}\, e^{-i\varphi_j} \end{cases}$

A: è canonica!

$$\Rightarrow I_j = \frac{x_j^2 + y_j^2}{2} = \sqrt{I_j}\, e^{i\varphi_j} \cdot \sqrt{I_j}\, e^{-i\varphi_j} = z_j \bar{z}_j$$

Procedimento di costruzione della forma normale

$$(\square) \quad H^{(0)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (z_j \bar{z}_j) + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l^{(0)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})$$

indice del "passo di normalizzazione"

dove $f_r^{(r-1)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{|\underline{\ell}|+|\underline{\bar{\ell}}|=r+2} c_{\underline{\ell},\underline{\bar{\ell}}}\, \underline{z}^{\underline{\ell}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\bar{\ell}}}$

$$\downarrow$$

e $\mathcal{Z}_r(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{2|\underline{\ell}|=r+2} c_{\underline{\ell},\underline{\ell}}\, \underline{z}^{\underline{\ell}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\ell}}$ $\leftarrow = 0$ se r è dispari

---

Proposizione: $H^{(r)} = \exp L_{\chi_r} H^{(r-1)}$ (dove $H^{(0)}$ è data da $(\square)$) è della forma

$H^{(r)} = \mathcal{Z}^{(r)} + R^{(r)}$ dove la parte di forma normale

$\mathcal{Z}^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} Z_s(z_1 \cdot \bar{z}_1, \ldots, z_n \cdot \bar{z}_n)$ e il resto $R^{(r)} = \sum_{s=r+1}^{+\infty} f_s^{(r)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})$

$$f_s^{(r)} = \frac{1}{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor !} L_{\chi_2}^{\lfloor s/2 \rfloor} Z_m + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{j!} L_{\chi_2}^{j} f_{s-j2}^{(r-1)} \quad \forall s \geq 2 \text{ -}$$

dove $s = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor \cdot 2 + m$

$$\Rightarrow R^{(r)} := \sum_{s=r+1}^{+\infty} f_s^{(r)}$$ definiti come sopra

e $f_2^{(r)}$ è il nuovo termine di forma normale. Infatti, $f_2^{(r)} = \frac{1}{1!} L_{\chi_2} Z_0 + f_2^{(r-1)} = Z_2$

per l'eq. omologica, dove $Z_2(z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n)$. C.V.D.

Verso uno studio analitico delle proprietà della forma normale di Birkhoff

Sia $g = \sum_{|\underline{e}|+|\underline{\bar{e}}|=s+2} c_{\underline{e},\underline{\bar{e}}} \underline{z}^{\underline{e}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\bar{e}}}$, allora

$$\|g\| = \sum_{|\underline{e}|+|\underline{\bar{e}}|=s+2} |c_{\underline{e},\underline{\bar{e}}}| \Rightarrow \sup_{\underline{z}\in B_\rho(\underline{0})} |g(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})| \leq \|g\| \rho^{s+2}$$

Lemma: Siano $f \in \mathcal{P}_{r+2}$, $g \in \mathcal{P}_{s+2}$

$$\|L_g f\| = \|\{f, g\}\| \leq (r+2)\cdot(s+2)\|f\|\cdot\|g\|$$

Proposizione: $\forall\, r$ la forma normale normale di Birk. rapp. da $H^{(r)} = Z^{(r)} + R^{(r)}$ converge su

$$\rho < \frac{1}{2}\,\frac{1}{A(3r)^{(\tau+3)r}} \quad \left(\text{dove } A = a \cdot C \cdot e^{2/\frac{11}{6}}\right)$$

e vale la seguente stima

$$\sup_{z \in B_\rho(0)} \left|R^{(r)}\right| \leq 2t_a^3 \rho^3 \left(A(3r)^{\tau+3}\rho\right)^r$$

Dim.: Basta ricordare che

$$\sup_{z \in B_\rho(0)} \left|R^{(r)}\right| \leq \sum_{s=r+1}^{+\infty} F_s^{(r)} \rho^{s+3}$$

$$< \text{cost.} \cdot \sum_{s=r+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

$$? = \tau_{opt} \text{ t.c. } \frac{\sup_{z\in B_\rho(0)} |R^{(\tau+1)}|}{\sup_{z\in B_\rho(0)} |R^{(\tau)}|} = \frac{\cancel{2E A \rho^3} \left(A\left(3(\tau+1)\right)^{\tau+3}\rho\right)^{\tau+1}}{\cancel{2E A \rho^3}\left(A\left(3\tau\right)^{\tau+3}\rho\right)^{\tau}} \leq 1$$

Iteriamo la costruzione fino a quando $3^{\tau+3} A \left(\frac{\tau+1}{\tau}\right)^{(\tau+3)\tau} \rho\, (\tau+1)^{\tau+3} \simeq 1$

$$\Rightarrow 3^{\tau+3} A \left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{(\tau+3)} \rho\, (\tau+1)^{\tau+3} \simeq 1$$

$$\Rightarrow 3^{\tau+3} A\, e^{\tau+3} \rho\, (\tau+1)^{\tau+3} \simeq 1 \Rightarrow \tau_{opt} \simeq \left(\frac{1}{3^{\tau+3} A \rho e^{\tau+3}}\right)^{1/(\tau+3)}$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in B_\rho(0)} |R^{(\tau_{opt})}| \leq 2E A \rho^3 \left(\frac{\cancel{A}\,\cancel{3^{\tau+3}}\,\cancel{\rho}}{\cancel{3^{\tau+3}}\,\cancel{A}\,\cancel{\rho}\, e^{\tau+3}}\right)^{\tau_{opt}}$$

$$\simeq 2E A \rho^3 \exp\left(-(\tau+3) \cdot \frac{1}{A^{1/(\tau+3)}\, 3e} \cdot \frac{1}{\rho^{1/(\tau+3)}}\right)$$

Ponendo $\dfrac{(\tau+3)}{A^{1/\tau+3}\,3e} = (\rho^*)^{1/\tau+3} \Rightarrow \left|R^{(2opt)}\right| \simeq \rho^3 \exp\left[-\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{\frac{1}{\tau+3}}\right]$

cost.

Il resto è esponenzialmente piccolo rispetto a $1/\rho$.

Stabilità effettiva.

? $\dot{I}_j = z_j \bar{z}_j \quad \forall j = 1, \dots, n$. Calcoliamo $\dot{I}_j = \{I_j, H^{(2)}\}$

$\Rightarrow \dot{I}_j = \cancel{\{I_j, Z^{(2)}(I_1, \dots, I_n)\}} + \{I_j, R^{(2)}\}$ dove possiamo stimare $\{I_j, R^{(2)}\}$ come segue:

$$\|\{I_j, R^{(r)}\}\| \leq \sum_{s=r+1}^{+\infty} \|I_j, f_s^{(r)}\| \leq 2 \sum_{s=r+1}^{+\infty} (s+2) \|f_s^{(r)}\|$$

$$\lesssim \frac{E(a, \rho)^{s+2} (A \mathfrak{z}_r)^{s-1}}{}$$

Sono stime analoghe a quelle per il resto a parte il fattore

Ci si riconduce a $\displaystyle\sum_{s=r+1}^{+\infty} (s+1) x^s = \frac{d}{dx} \sum_{s=r+1}^{+\infty} x^{s+1}$

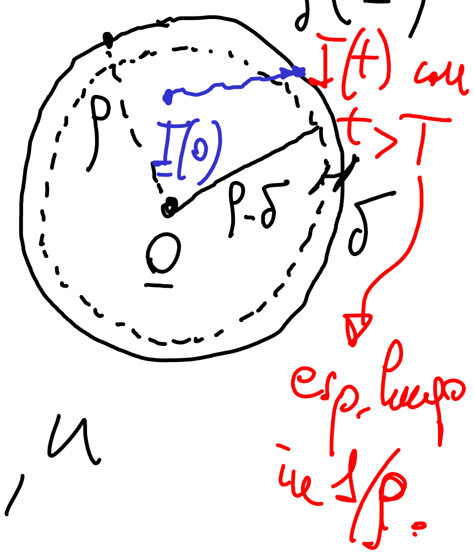
$$\sup_{z \in B_\rho(0)} \|\{I_j, R^{(r)}\}\| \leq \text{costanti}\ \rho^2 \left[A (\mathfrak{z}_r)^{r+3} \rho\right]^r = \frac{d}{dx} \frac{x^{r+2}}{1-x} \text{ se } |x| < 1$$

$$= O(x^{r+1})$$

$\Rightarrow$ con lo stesso procedimento si riesce a ottenere che $\dot{I}_j = O\left(\rho^2 \exp\left(-\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1/(r+3)}\right)$

$\forall \underline{z} \in B_\rho(\underline{0})$ si ha che $\sup |I_j| \le \rho^2$

'' '' '' '' $B_{\rho-\delta}(\underline{0})$ '' '' '' $\sup |I_j| \le (\rho-\delta)^2$



$\forall$ cond. iniz. t.c. $|I_j| \le (\rho-\delta)^2 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$

allora avremo che $|I_j(t)| \le |I_j(0)| + \sup |\dot{I}_j(t)| \cdot |t|$

$$|I_j(t) - I_j(0)| \le \underbrace{O\left(\rho^2 \exp\left(-\frac{\rho_*^{1/(\tau+3)}}{\rho}\right)\right)}_{=:\,\varepsilon} \cdot |t|$$

Supponiamo che $|I_j(t) - I_j(0)| \le \delta^2$, ne segue che

$\forall |t| \leq T \colon= \dfrac{\delta^2}{\varepsilon}$ abbiamo che

$$|I_j(t) - I_j(0)| \leq \varepsilon \cdot T = \cancel{\varepsilon} \cdot \frac{\delta^2}{\cancel{\varepsilon}}$$

vale per tempi $O\left(\exp\left[\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1/\tau+3}\right]\right)$, cioè

esp. lunghi in $1/\rho$ –

$\forall |t| \leq T$

$$\Rightarrow |I_j(t)| \leq |I_j(0)| + |I_j(t) - I_j(0)|$$

sta in $B_\rho(\underline{0})$ – $= (\rho-\delta)^2 + \delta^2 = \rho^2 - 2\rho\delta + 2\delta^2 \leq \rho^2$

Si possono quindi ottenere stime di stabilità per tempi che possono eccedere quelle "di vita" del sistema o del modello.

Es. il sist. solare.

Riconsideriamo il problema generale della dinamica: $H(p, q; \varepsilon) = H_0(p) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(p, q)$

con $(p, q) \in \underset{\in \mathbb{R}^n}{G} \times \mathbb{T}^n$ e ε "piccolo parametro".

Serie di Lie come trasf. canoniche prossime all'identità:

$$\exp(\varepsilon L_\chi)\circ := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^j \circ = \circ + \underbrace{\sum_{j\geq 1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^j \circ}_{= O(\varepsilon)}$$

Proprietà fondamentali.

Proposizione: $\exp(\varepsilon L_\chi)\circ$ è un operatore lineare che preserva il prodotto

(cioè $\exp(\varepsilon L_\chi)(f\cdot g) = \left[\exp(\varepsilon L_\chi) f\right]\cdot\left[\exp(\varepsilon L_\chi) g\right]$)

e le parentesi di Poisson (cioè $\exp(\varepsilon L_\chi)\{f,g\} = \{\exp(\varepsilon L_\chi) f, \exp(\varepsilon L_\chi) g\}$)

Vale quindi anche il

Teorema [di scambio]: Sia f una funzione dinamica allora

$$f(\underline{p},\underline{q})\Big|_{\substack{\underline{p}=\exp(\varepsilon L_\chi)\underline{P}\\ \underline{q}=\exp(\varepsilon L_\chi)\underline{Q}}} = \exp(\varepsilon L_\chi)\, f(\underline{p},\underline{q})\Big|_{(\underline{p},\underline{q})=(\underline{P},\underline{Q})}$$

Esempi: 1) traslazione delle azioni $\chi(\underline{q}) = \overset{\in\mathbb{R}^n,\ \text{costante}}{\underline{\xi}}\cdot\underline{q}$

$$\exp\left(\varepsilon L_{\chi(\underline{q})}\right)\underline{q} = \underline{q} + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}L_\chi^{j-1}\cancel{\{\underline{q},\underline{\xi}\cdot\underline{q}\}} = \underline{q}$$

$$\forall i=1,\dots,n \quad \exp\left(\varepsilon L_{\chi(q)}\right)p_i = p_i + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^{j-1} \underbrace{\{p_i, \xi \cdot q\}}_{\text{costante}} =$$

$$= p_i - \varepsilon \xi_i + \cancel{\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\chi^{j-2} \text{costante}}$$

$$\Rightarrow \exp\left(\varepsilon L_{\chi(q)}\right)p = p - \varepsilon \xi$$

(2) $\chi = \chi(q)$ funzione trigonometrica

$$\Rightarrow \exp\left(\varepsilon L_{\chi(q)}\right)q = q \quad , \quad \exp\left(\varepsilon L_{\chi(q)}\right)p = p + \varepsilon \{p, \chi(q)\}$$

funz. solo di q

dove $\{p_i, \chi(q)\} = \frac{-\partial}{\partial q_i} \chi(q)$

Per il calcolo delle serie di Lie di funz. dinami-che è utile il diagramma del triangolo di Lie.

Vogliamo calcolare $g_0(p,q) + \varepsilon g_1(p,q) + \dots = \exp(\varepsilon L_\chi) \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s f_s(p,q)$

	$\exp(\varepsilon L_\chi)$	$\exp(\varepsilon L_\chi)$	$\exp(\varepsilon L_\chi)$	
g_0	f_0			$O(\varepsilon^0)$
εg_1	$\varepsilon L_\chi f_0$	εf_1		$O(\varepsilon^1)$
$\varepsilon^2 g_2$	$\frac{\varepsilon^2}{2} L^2_\chi f_0$	$\varepsilon^2 L_\chi f_1$	$\varepsilon^2 f_2$	$O(\varepsilon^2)$
$\varepsilon^s g_s$	$\frac{\varepsilon^s}{s!} L^s_\chi f_0$	$\frac{\varepsilon^s}{(s-1)!} L^{s-1}_\chi f_1$	$\dots$ $\varepsilon^s f_s$	$O(\varepsilon^s)$

$$\Rightarrow \varepsilon^{s} g_{s} = \varepsilon^{s} \sum_{j \geq 0}^{s} \frac{L_{X}^{j}}{j!} f_{s-j}$$