Per semplicità studiamo il modello di Henon-Heiles, descritto da

$$H(\underline{y},\underline{x}) = \frac{\omega_1}{2}\left(y_1^2+x_1^2\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(y_2^2+x_2^2\right) + \left(x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right)$$

Vogliamo fare delle simulazioni numeriche. Vogliamo utilizzare un metodo di integrazione simplettico! (sono descritti da una trasf. canonica).

Metodo Leap-Frog (è di ordine 2)

Sia $H = A + B$, dove Φ_A^t e Φ_B^t sono calcolabili esattamente (perché A e B integrabili, es. $A = A(\underline{y})$, $B = B(\underline{x})$)

$$\Big|\underbrace{\Phi_A^{\tau/2} \circ \Phi_B^{\tau} \circ \Phi_A^{\tau/2}}_{\Psi_{LF}^{\tau}} - \Phi_H^{\tau}\Big| = O(\tau^3)$$

$$\Big|\left(\Psi_{LF}^{T/N} - \Phi_H^{T/N}\right)^N = O(\tau^2)$$

Schema

$$\bullet \longrightarrow \Phi_A^{\tau/2}(\underline{z}(t)) \longrightarrow \Phi_B^{\tau}\left(\Phi_A^{\tau/2}(\underline{z}(t))\right) \longrightarrow \Phi_A^{\tau/2}\left(\Phi_B^{\tau}\left(\Phi_A^{\tau/2}(\underline{z}(t))\right)\right)$$

$$\underline{z}(t) = \left(\underline{p}(t), \underline{q}(t)\right)$$

dove $\tau = T/N$

Nel corso del modello di Henon-Heiles come si calcolano Φ_A^τ e Φ_B^τ -

$$A(\underline{y}) = \frac{\omega_1}{2} y_1^2 + \frac{\omega_2}{2} y_2^2 \qquad B(\underline{x}) = \frac{\omega_1}{2} x_1^2 + \frac{\omega_2}{2} x_2^2 + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

$$\Phi_A^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = y_1(0) \\ y_2(\tau) = y_2(0) \\ x_1(\tau) = \omega_1 y_1(0) \cdot \tau + x_1(0) \\ x_2(\tau) = \omega_2 y_2(0) \cdot \tau + x_2(0) \end{cases}$$

$$\Phi_B^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = -(\omega_1 x_1(0) + 2 x_1(0) x_2(0)) \cdot \tau + y_1(0) \\ y_2(\tau) = -(\omega_2 x_2(0) + x_1^2(0) - x_2^2(0)) \tau + y_2(0) \\ x_1(\tau) = x_1(0) \\ x_2(\tau) = x_2(0) \end{cases}$$

Proprietà fondamentale degli integratori simplettici

Siano H, Ψ^τ risp. una Ham. e una mappa simplettica (parametrizzata in τ) t.c.

$$\left| \Phi_H^\tau - \Psi^\tau \right| = O\left(\tau^{k+1}\right) \quad \text{per } \tau \to 0 .$$

allora $\exists$ una Ham. K_τ t.c. $\boxed{\left| K_\tau - H \right| = O\left(\tau^k\right)}$

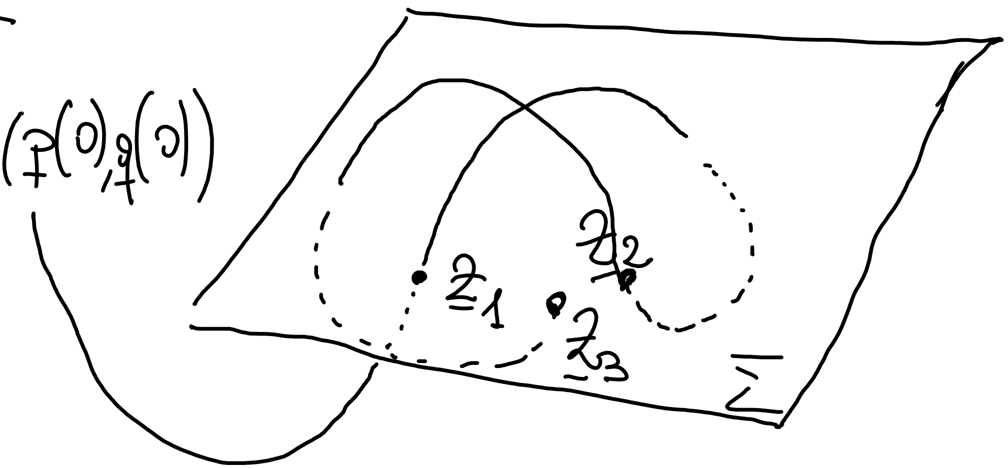
e $\left| \Phi_{K_\tau}^\tau - \Psi^\tau \right| \leq$ costante $\cdot\, \tau \cdot \exp\left(-\frac{\tau^*}{\tau}\right)$

cost. positiva

cioè con l'integratore simplettico rimaniamo estremamente vicini a H_τ per tempi lunghi.

Sezioni di Poincaré per il modello di Henon-Heiles

$\Phi_H^t(p(0),q(0))$



Le sezioni di Poincaré sono date dal

$\{t \in \mathbb{R} : \Phi_H^t(p(0),q(0)) \cap \Sigma$

$H(x_1, x_2, y_1, y_2)$

Σ è def. da $x_1 = 0$

Scegliamo cond. iniz. su Σ come segue:

Si tracciano le sez. di Poinc. per varie orbite con $\bar{E}$ costante.

$$H(0, x_2, y_1, y_2) = \bar{E}$$

in grafico si riporta la coppia (x_2, y_2),

poiché y_1 si ricava da $H(0, x_2, y_1, y_2) = \bar{E}$

incognita

si considerano note

$$\Rightarrow \frac{\omega_1}{2}\left(\cancel{x_1^2} + y_1^2\right) + \frac{\omega_2}{2}\left(x_2^2 + y_2^2\right) + \cancel{x_1^2 x_2} - \frac{x_2^3}{3} = \bar{E}$$

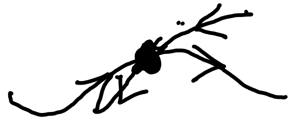
$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{2\bar{E} - \omega_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + 2x_2^3/3}{\omega_1}}$$

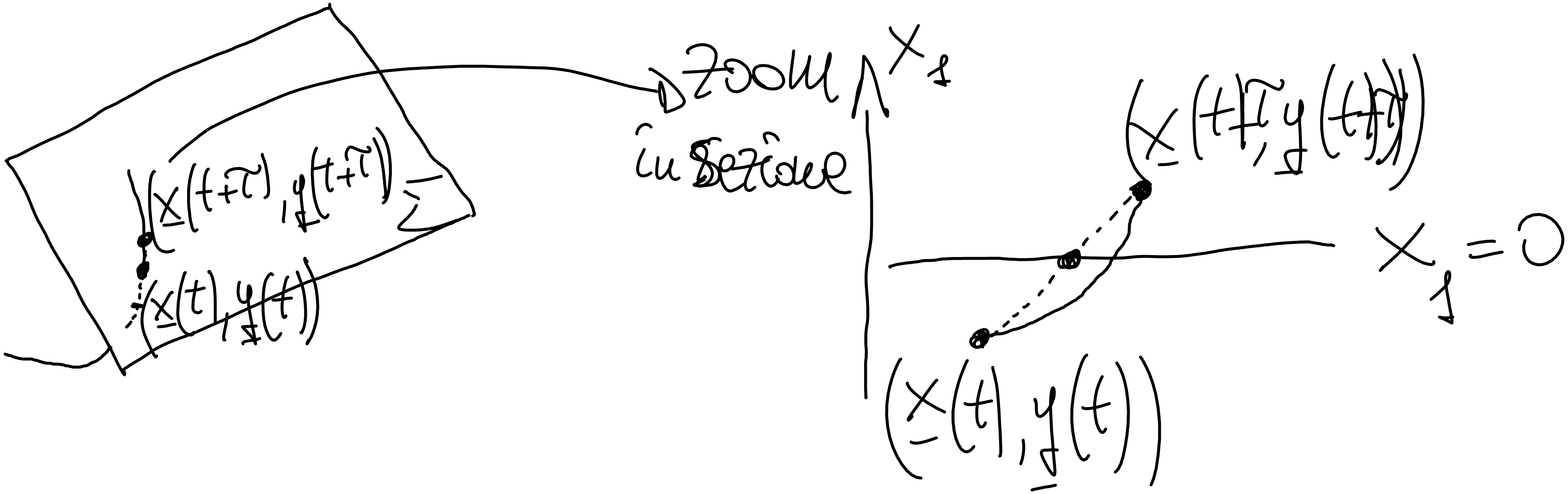
si ricordi che $\dot{x}_1 = \omega_1 y_1$

Oss.: le sezioni di Poincaré possono essere "perfettamente sovrapposte" oppure non si intersecano.

Se si intersecassero senza essere sovrapposte significherebbe che $\exists\ t_1, t_2$ t.c. $x_2(t_1) = x_2(t_2)$, $y_2(t_1) = y_2(t_2)$, $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$, $y_1(t_1) = y_1(t_2) = y_1(E, x_2, y_2)$

$$\Rightarrow \Phi_H^{\tau}\left(x_1(t_1), x_2(t_1), y_1(t_1), y_2(t_1)\right) = \Phi_H^{\tau}\left(x_1(t_2), x_2(t_2), y_1(t_2), y_2(t_2)\right)$$

Se capita  allora devono esserci punti asintotici all'intersezione



$$\bar{\tau} \text{ t.c. } \frac{x_1(t+\tau)-x_1(t)}{\tau}\,\bar{\tau}+x_1(t)=0$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}=-\frac{x_1(t)}{x_1(t+\tau)-x_1(t)}\cdot\tau=-\frac{xprec[0]}{x[0]-xprec[0]}\cdot(dt)$$

$$\Rightarrow \frac{x_2(t+\tau)-x_2(t)}{\tau}\cdot\bar{\tau}+x_2(t)=\frac{x[1]-xprec[1]}{dt}\cdot\bar{\tau}+xprec[1]$$

$$coef\_prop=\frac{\bar{\tau}}{dt}$$