

Per semplicità studiamo il modello di Hemon-Heiles, descritto da

$$H(\underline{y}, \underline{x}) = \frac{w_1}{2} (y_1^2 + x_1^2) + \frac{w_2}{2} (y_2^2 + x_2^2) + \left( x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right)$$

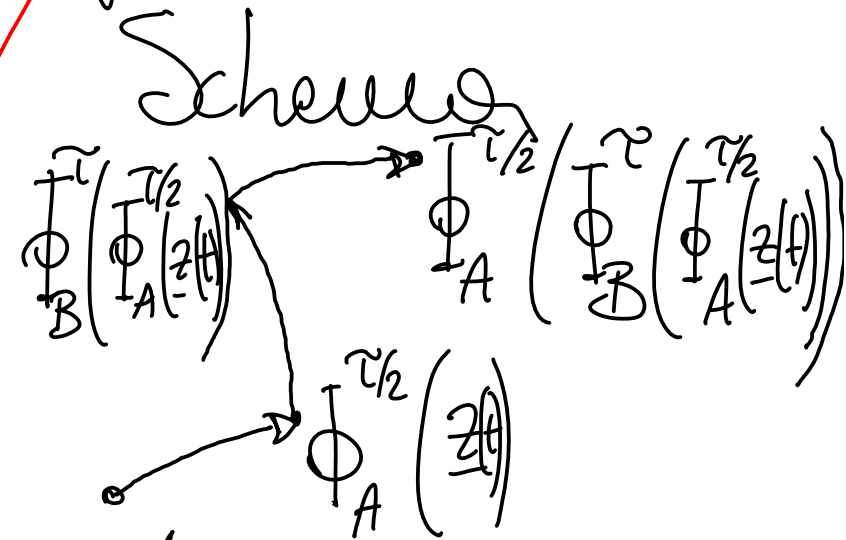
Vogliamo fare delle simulazioni numeriche - Vogliamo utilizzare un metodo di integrazione simplettico! (sono descritti da una transf-canonical) -

Metodo Leap-frog (è di ordine 2)

Sia  $H = A + B$ , dove  $\Phi_A^t$  e  $\Phi_B^t$  sono calcolabili esattamente (perché  $A$  e  $B$  integrabili, es.  $A = A(y), B = B(x)$ )

$$\left| \Phi_A^{\tau/2} \circ \Phi_B^{\tau} \circ \Phi_A^{\tau/2} - \Phi_H^{\tau} \right| = O(\tau^3)$$

$$\underbrace{\Psi_{LF}^{\tau}}_{\Psi_{LF}^{\tau/N} \circ \Phi_H^{\tau/N}} = O(\tau^2)$$



$$z(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

dove  $\tau = T/N$

Nel caso del modello di Henon-Heiles  
come si calcolano  $\Phi_A^\tau$  e  $\Phi_B^\tau$

$$A(\underline{y}) = \frac{\omega_1}{2} y_1^2 + \frac{\omega_2}{2} y_2^2$$

$$B(\underline{x}) = \frac{\omega_1}{2} x_1^2 + \frac{\omega_2}{2} x_2^2 + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

$$\Phi_A^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = y_1(0) \\ y_2(\tau) = y_2(0) \\ x_1(\tau) = \omega_1 y_1(0) \cdot \tau + x_1(0) \\ x_2(\tau) = \omega_2 y_2(0) \cdot \tau + x_2(0) \end{cases}$$

$$\Phi_B^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = \left( \omega_1 x_1(0) + 2x_1(0)x_2(0) \right) \tau + y_1(0) \\ y_2(\tau) = \left( \omega_2 x_2(0) + x_1^2(0) - x_2^2(0) \right) \tau + y_2(0) \\ x_1(\tau) = x_1(0) \\ x_2(\tau) = x_2(0) \end{cases}$$

Proprietà fondamentale degli integratori simplettici  
 Siano  $H$   $\Psi^\tau$  risp. una ham. e una mappa simplettica (parametrizzata in  $\tau$ ) t.c. -

$$\left| \Phi_H^\tau - \Psi^\tau \right| = O(\tau^{k+1}) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0.$$

allora  $\exists$  una ham.  $K_\tau$  t.c. -  $|K_\tau - H| = O(\tau^k)$

$$\text{e } \left| \Phi_{K_\tau}^\tau - \Psi^\tau \right| \leq \underbrace{\text{Costante} \cdot \tau \cdot \exp\left(-\frac{\tau^*}{\tau}\right)}_{\text{cost. positiva}}$$

cioè con l'integratore simplettico rimane  
 estremamente vicini a  $\Phi_\tau$  per tempi lunghi -