

Verso la forma normale di Birkhoff.

Stiamo considerando

$$H(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (x_j^2 + y_j^2) + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(\underline{x}, \underline{y})$$

dove $f_\ell(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{P}_\ell$, cioè $f_\ell(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{|\underline{j}|+|\underline{m}|=\ell} c_{\underline{j}, \underline{m}} x_j^{\underline{j}} y^{\underline{m}}$

dove $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$), $c_{\underline{j}, \underline{m}} \in \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) e

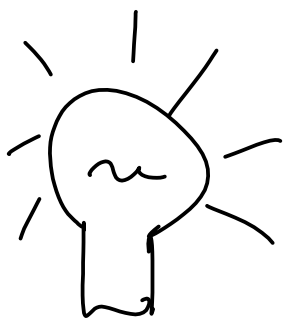
$$\underline{\hat{x}} = x_1^{\hat{j}_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\hat{j}_n}, \quad \underline{\hat{y}} = y_1^{u_1} \cdot \dots \cdot y_n^{u_n}$$

la parte quadratico è t.c.

$$\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{2} (x_j^2 + y_j^2) = \underline{w} \cdot \underline{I} \quad \text{dove } \underline{I}_1, \dots, \underline{I}_n \text{ sono}$$

le azioni dell'osc. armonico

$$\begin{cases} x_j = \sqrt{2I_j} \cos \varphi_j \\ y_j = \sqrt{2I_j} \sin \varphi_j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{è una} \\ \text{trasf. can.} \end{matrix}$$



Se $\underline{I}$ una transf. can. t.c. $(\underline{x}, \underline{y}) = \mathcal{C}(\underline{p}, \underline{q})$
 e $H(\mathcal{C}(\underline{p}, \underline{q})) = K(\underline{p})$, allora il
 sistema sarebbe banalmente integrabile.

coord. direzione
e angoli

Dal p.t. di vista tecnico è naturale cercare di rimuovere i termini perturbativi (che includono la dipendenza da q) ordine per ordine con trasf. prossime all'identità.

Possiamo definire trasf. prossime all'identità con le serie di Lie (che descrivono flussi Ham.).

Oss. 1: Sia Φ_X^t (dove $X(x, y)$ è una funz. d'inv.)
è una trasf. canonica

è noto!

Oss 2: Scriviamo $\Phi_{\chi}^t \underline{z}$ dove $\underline{z} = (x, y)$:

$$\underline{z}(t) = \Phi_{\chi}^t \underline{z} = \underline{z} + t \cdot \dot{\underline{z}} + \frac{t^2}{2} \ddot{\underline{z}} + \frac{t^3}{3!} \overset{\circ\circ}{\ddot{\underline{z}}} + \dots$$

dove $\dot{\underline{z}} = \{ \underline{z}, \chi \} = L_{\chi} \underline{z}$

$$\frac{d}{dt} \underline{z} = \frac{d}{dt} \{ \underline{z}, \chi \} = \{ \{ \underline{z}, \chi \}, \chi \} = L_{\chi}^2 \underline{z}$$

$$L_{\chi} L_{\chi}^2 \underline{z} = L_{\chi}^3 \underline{z}$$

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= \underline{z} + t L_{\chi} \underline{z} + \frac{t^2}{2} L_{\chi}^2 \underline{z} + \frac{t^3}{3!} L_{\chi}^3 \underline{z} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} L_{\chi}^j \underline{z} = \exp(t L_{\chi}) \underline{z} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exp(t L_x) \cdot$ def. transf. canoniche.

Def.: Si dice spazio delle serie formali, l'insieme $\mathcal{P} = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{P}_s$,

cioè $f(x, y) \in \mathcal{P}$ se $f(x, y) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{|\underline{i}|+|\underline{l}|=s} c_{\underline{i}, \underline{l}} x_{\underline{i}}^{\underline{i}} y_{\underline{l}}^{\underline{l}}$

Def.: Si dice "trasformatore di Lie" l'operatore $T_x: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ def. come segue $T_x f = f_0 + f_1 + \dots$ dove $f_0 = f$ e $f_s := \sum_{j=1}^s \frac{1}{s} L_{x_j} f_{s-j}$ dove $x = \{x_1, \dots, x_s, \dots\}$ con $x_s \in \mathcal{P}_{s+2}$

Proposizione: Sia $f \in \mathcal{P}_2$, $g \in \mathcal{P}_s$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 allora: $\alpha f \in \mathcal{P}_2$, $f' \in \mathcal{P}_{2-1}$, $f \cdot g \in \mathcal{P}_{2+s}$,
 $\{f, g\} \in \mathcal{P}_{2+s-2}$ (perché $\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}$)

Oss.: Sia $f \in \mathcal{P}_2$ allora

$$f_s = \sum_{i=1}^s \frac{1}{s} L_{x_i} f_{s-i} \in \mathcal{P}_{2+s} \quad (\text{per induzione su } s \text{ per la formula})$$

Proposizione: $T_x : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ è lineare (ovvio!),
 preserva il prodotto (cioè $\forall f, g \in \mathcal{P}$, $T_x(f \cdot g) = T_x f \cdot T_x g$)

e preserva le par. di Poisson (cioè $\forall f, g \in \mathcal{P}, T_x\{f, g\} = \{T_x f, T_x g\}$)

Dim. (dal fatto che commuta con $\{ \cdot, \cdot \}$) -

Ricordiamo che $T_x\{f, g\} = \sum_{s=0}^{+\infty} \{f, g\}_s$

dove $\{f, g\}_0 := \{f, g\}$ e $\{f, g\}_s := \sum_{j=1}^s \frac{1}{s} L_{X_j} \{f, g\}_{s-j}$

Cerchiamo di dim. (per induzione) che

$$\{f, g\}_s = \sum_{e=0}^s \{f_e, g_{s-e}\}$$

f_e -esimo termine per. di $T_x f$
 $s-e$ -esimo " " " $T_x g$

È un'uguaglianza ovvia per $s=0$, poiché

$$\{f, g\}_0 = \{f, g\} = \{f_0, g_0\}$$

applicando
l'ip. di
induzione

Diciamo il caso s essendo valido fino a $s-1$ -

$$\{f, g\}_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_j} \{f, g\}_{s-j} = \sum_{j=1}^s \sum_{e=0}^{s-j} \frac{j}{s} L_{\chi_j} \{f_e, g_{s-j-e}\}$$

$$= \sum_{j=1}^s \sum_{e=0}^{s-j} \frac{j}{s} \left[\{f_e, \chi_j, g_{s-j-e}\} - \{g_{s-j-e}, \chi_j, f_e\} \right]$$

Jacobi

$$= \sum_{j=1}^s \sum_{e=0}^{s-j} \frac{j}{s} \left[\{L_{\chi_j} f_e, g_{s-j-e}\} + \{f_e, L_{\chi_j} g_{s-j-e}\} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{\underline{s}} \sum_{e=0}^{\underline{s-j}} \frac{j}{s} \left\{ L_{x_j} f_{s-j-e}, g_e \right\} + \sum_{j=1}^{\underline{s}} \sum_{e=0}^{\underline{s-j}} \frac{j}{s} \left\{ f_e, L_{x_j} g_{s-j-e} \right\}$$

Cancelling
 simplification

$$= \sum_{e=0}^{\underline{s-1}} \sum_{j=1}^{\underline{s-e}} \frac{j}{s} \left[\left\{ L_{x_j} f_{s-j-e}, g_e \right\} + \left\{ f_e, L_{x_j} g_{s-j-e} \right\} \right]$$

per
 def.
 di L_x

$$= \sum_{e=0}^{\underline{s-1}} \frac{s-e}{s} \left\{ f_{s-e}, g_e \right\} + \sum_{e=0}^{\underline{s-1}} \frac{s-e}{s} \left\{ f_e, g_{s-e} \right\}$$

$$= \sum_{e=0}^{\underline{s}} \frac{s-e}{s} \left\{ f_{s-e}, g_e \right\} + \sum_{e=0}^{\underline{s}} \frac{e}{s} \left\{ f_{s-e}, g_e \right\}$$

$$= \sum_{e=0}^{\underline{s}} \left\{ f_{s-e}, g_e \right\}$$

Oss, che:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_X \{f, g\} &= \sum_{s=0}^{+\infty} \{f, g\}_s = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{e=0}^s \{f_e, g_{s-e}\} \\
 &= \sum_{e=0}^{+\infty} \sum_{s=e}^{+\infty} \{f_e, g_{s-e}\} = \sum_{e=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \{f_e, g_s\} \\
 &= \left\{ \sum_{e=0}^{+\infty} f_e, \sum_{s=0}^{+\infty} g_s \right\} = \{ \mathcal{T}_X f, \mathcal{T}_X g \}
 \end{aligned}$$

C.V.D.