

Come appiappare il th. di Poincaré?

osserviamo che se $H_0 = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2$

allora $\det(\text{Hess} H_0) = \det(J_{ac}(\omega_1, \omega_2)) = 0$,

$\Rightarrow$ viene meno la non degenerazione.

In laboratorio stiamo considerando

$$H(\underline{x}, y) = \frac{1}{2} \left[\omega_1 (x_1^2 + y_1^2) + \omega_2 (x_2^2 + y_2^2) \right] + \sum_{l=3}^{+\infty} f_l(\underline{x}, y)$$

con f_l pol. omogeneo di grado l .

Introduciamo $(\underline{x}', y')$ t.c. $\underline{x} = \varepsilon \underline{x}'$, $y = \varepsilon y'$

$$\Rightarrow H' = \frac{1}{\varepsilon^2} H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \Big|_{\substack{x = \varepsilon x' \\ y = \varepsilon y'}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j (x_j'^2 + y_j'^2) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s f_{s+2}(x', y')$$

f_{s+2} di grado $s+2$ — Poichè $\begin{cases} x_j' = \sqrt{2p_j} \cos q_j \\ y_j' = \sqrt{2p_j} \sin q_j \end{cases}$

$$\Rightarrow H(P, q, \varepsilon) = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s f_{s+2}(P, q)$$

dove $f_{s+2} = O\left(\|P\|^{\frac{s+2}{2}}\right)$ e lo sv. di Fourier $f_{s+2}(P, q) = \sum_{\substack{\underline{k} \text{ t.c. } k_j \in \mathbb{Z} \text{ stessa parità} \\ |\underline{k}| \leq p_j}} c_{\underline{k}} P^{\frac{1}{2} i \underline{k} \cdot \underline{q}}$ con $|\underline{k}| = s+2$

$\underline{P} = p_1 \dots p_u$
 $\downarrow$

Per un problema del genere (con parte integrabile isocrona) i "pic. divisori" $\underline{k} \circ \underline{\omega}(P) = \underline{k} \cdot \underline{\omega} + \text{cost.}$

Analizzando Cab- Π (SH-01.nb e Cab- Π (SH-02.nb

siamo riusciti a produrre uno sviluppo
truncato della H₀₁ - del prob. dei 3 corpi
ristretto circolare piano in coord. eliocentriche
polari sviluppato attorno a L4/L5.

la H₀₁ - risultante è del tipo

$$H\left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}\right) = \frac{w_1}{2} \left(x_1^2 + y_1^2 \right) + \frac{w_2}{2} \left(x_2^2 + y_2^2 \right) + \sum_{l=3}^{N_{\text{trunc}}} f_l \left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1} \right)$$

ove f_l pol. omogeneo di grado l .

Per semplicità studiamo il modello di Henon-Heiles, descritto da

$$H(\underline{y}, \underline{x}) = \frac{w_1}{2} (y_1^2 + x_1^2) + \frac{w_2}{2} (y_2^2 + x_2^2) + \left(x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right)$$

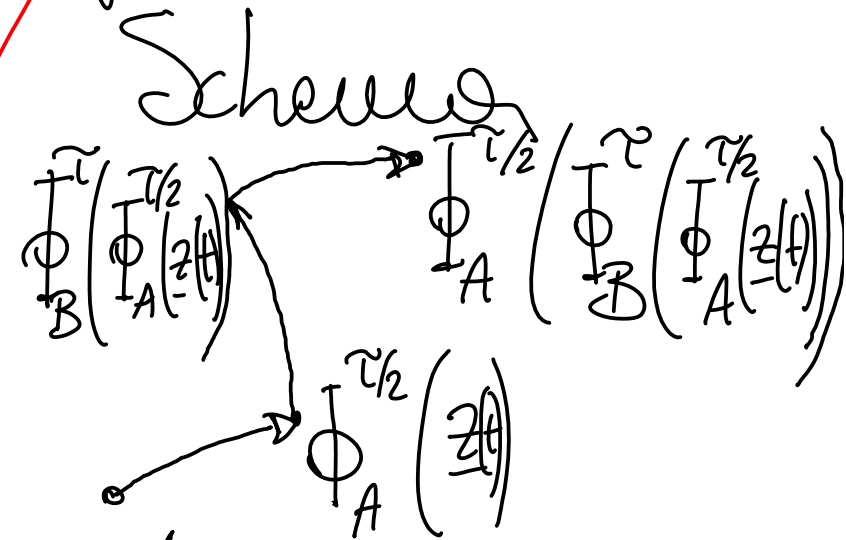
Vogliamo fare delle simulazioni numeriche - Vogliamo utilizzare un metodo di integrazione simplettico! (sono descritti da una transf-canonical) -

Metodo Leap-frog (è di ordine 2)

Sia $H = A + B$, dove Φ_A^t e Φ_B^t sono calcolabili esattamente (perché A e B integrabili, es. $A = A(y), B = B(x)$)

$$\left| \Phi_A^{\tau/2} \circ \Phi_B^{\tau} \circ \Phi_A^{\tau/2} - \Phi_H^{\tau} \right| = O(\tau^3)$$

$$\underbrace{\Psi_{LF}^{\tau}}_{\Psi_{LF}^{T/N} - \Phi_H^{T/N}} = O(\tau^2)$$



$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

dove $\tau = T/N$

Nel caso del modello di Henon-Heiles
come si calcolano Φ_A^τ e Φ_B^τ

$$A(\underline{y}) = \frac{\omega_1}{2} y_1^2 + \frac{\omega_2}{2} y_2^2$$

$$B(\underline{x}) = \frac{\omega_1}{2} x_1^2 + \frac{\omega_2}{2} x_2^2 + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}$$

$$\Phi_A^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = y_1(0) \\ y_2(\tau) = y_2(0) \\ x_1(\tau) = \omega_1 y_1(0) \cdot \tau + x_1(0) \\ x_2(\tau) = \omega_2 y_2(0) \cdot \tau + x_2(0) \end{cases}$$

$$\Phi_B^\tau : \begin{cases} y_1(\tau) = \left(\omega_1 x_1(0) + 2x_1(0)x_2(0) \right) \tau + y_1(0) \\ y_2(\tau) = \left(\omega_2 x_2(0) + x_1^2(0) - x_2^2(0) \right) \tau + y_2(0) \\ x_1(\tau) = x_1(0) \\ x_2(\tau) = x_2(0) \end{cases}$$