Teorema (di non-esistenza degli integrali primi di Poincaré):

Sia $H(p, q; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(p, q)$ con $H_0 = H_0(p)$

t.c. ① $\det\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial p_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} = \det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$

(non degenerazione)

② $h_{\underline{k}}(p) \neq 0 \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n$ su $\underline{k} \cdot \underline{\omega}(p) = 0$ (genericità, dove $H_1(p, q) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} h_{\underline{k}}(p) e^{i\underline{k} \cdot q}$)

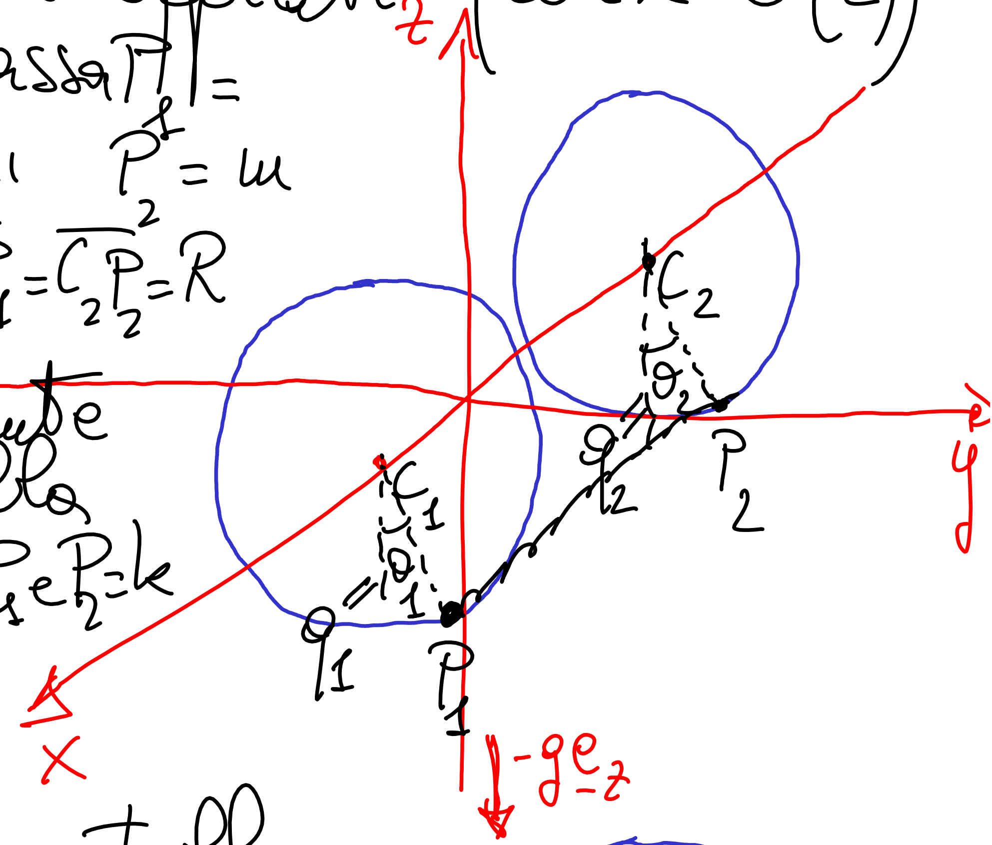
Allora $\nexists\ \Phi(p, q; \varepsilon)$ integrale primo e analitico che sia indipendente da H.

Problema di due rotatori posti in verticale (con $g = O(\varepsilon)$) e debolmente accoppiati (con $k = O(\varepsilon)$)

massa P_1 = " $P_2 = m$

$\overline{C_1P_1} = \overline{C_2P_2} = R$

costante molla tra P_1 e $P_2 = k$



Lagrangiana

$$L = T - U \quad \text{con } T = \frac{1}{2} I \left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right)$$

dove $I = mR^2$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2I}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - mgR\left(\cos q_1 + \cos q_2\right) - kR^2 \cos\left(q_1 - q_2\right)$$

da controllare

$$H(p,q) = \frac{1}{2I}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \varepsilon\, U\left(q_1, q_2\right)$$

$\Phi_0 = p_1$

proviamo a costruire un integrale primo $\Phi(p,q;\varepsilon) = \Phi_0(p) + \varepsilon \Phi_1(p,q) + \varepsilon^2 \Phi_2(p,q) + \dots$

Ci poniamo il problema di determinare

Φ t.c. $\{\Phi, H\} = 0$.

Consideriamo $\Phi(p, q, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s \Phi_s(p,q) = \Phi_0(p,q) + \varepsilon \Phi_1(p,q) + \dots$

Da $\{\Phi, H\} = 0$ $\Rightarrow \{\Phi_0, H_0\} = 0$ all'$O(\varepsilon^0)$

È il sistema ricorsivo per det. l'int. primo Φ $\Rightarrow$ $\boxed{\{\Phi_1, H_0\} = -\{\Phi_0, H_1\} \quad \text{all'} O(\varepsilon)}$

$\vdots$

$\Rightarrow \{\Phi_s, H_0\} = -\{\Phi_{s-1}, H_1\} - \{\Phi_{s-2}, H_2\} - \dots - \{\Phi_0, H_s\} \doteq \Psi_s(p,q)$ all'$O(\varepsilon^s)$

Siano $\Psi_S(\underline{p},\underline{q}) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}}(\underline{p})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}}$

$$\Phi_S(\underline{p},\underline{q}) = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{\underline{k}}(\underline{p})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}}$$

$$\Rightarrow L_{H_0}\Phi_S := \underbrace{\{\Phi_S, H_0\}} = \Psi_S \Rightarrow \boxed{\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\underline{k}}(\underline{p})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}} \cdot i k_j \frac{\partial H_0}{\partial p_j} = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} c_{\underline{k}}(\underline{p})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}}}$$

$\forall\, \underline{k}\in\mathbb{Z}^n$ abbiamo $\Longleftarrow$

$$i\underline{k}\cdot\underline{\omega}(\underline{p})\cdot \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) = c_{\underline{k}}(\underline{p}) \quad \text{se } \underline{k}\cdot\underline{\omega}(\underline{p}) \neq 0$$

$\underline{\omega}(\underline{p}) = \mathrm{Jac}(H_0)$

$\varphi_{\underline{k}}$: incognito; $c_{\underline{k}}$: noto

$$\rightarrow \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) = \boxed{c_{\underline{k}}(\underline{p}) \big/ \left[i\underline{k}\cdot\underline{\omega}(\underline{p})\right]}$$

piccolo denominatore!

Riconsideriamo

$$L_{H_0}\Phi_1 = -\{\Phi_0, H_1\} \quad \text{con} \quad \boxed{H_0 = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) \quad \text{parte integrabile di } H}$$

dove $\Phi_0 = P_1$, $H_1 = \left(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos(q_1 - q_2)\right)$

$$= \left(e^{iq_1} + e^{iq_2} + e^{i(q_1 - q_2)}\right) + c.c.$$

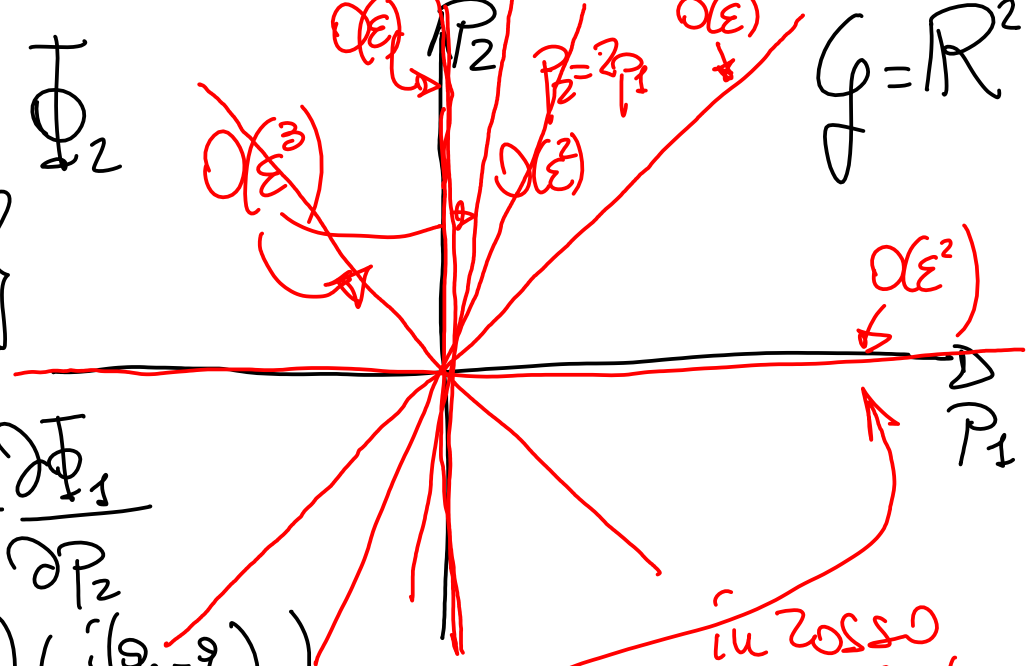
$$-\{\Phi_0, H_1\} = \{H_1, \Phi_0\} = \frac{\partial H_1}{\partial q_1} = i\left(e^{iq_1} + e^{i(q_1 - q_2)}\right) + c.c.$$

poniamo $\Phi_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k(P)\, e^{ik\cdot q} \Rightarrow \{\Phi_1, H_0\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} i \sum_{j=1}^{n} k_j \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial p_j}}_{\omega_j(P)} \varphi_k(P)\, e^{ik\cdot q}$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \frac{e^{iq_1}}{P_1} + \frac{e^{i(q_1 - q_2)}}{P_1 - P_2} + c.c.$$

Proviamo a determinare Φ_2 dall'eq.: $L_{H_0}\Phi_2 = -\{\Phi_0, H_2\} - \{\Phi_1, H_1\}$

$\mathcal{G} = \mathbb{R}^2$



$$-\{\Phi_1, H_1\} = \{H_1, \Phi_1\} = \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2}$$

$$= -i\, e^{iq_1}\cdot\left(\frac{e^{iq_1}}{p_1^2} + \frac{e^{i(q_1-q_2)}}{(p_1-p_2)^2}\right) + i\, e^{i(q_1-q_2)}\cdot\left(\frac{e^{i(q_1-q_2)}}{(p_1-p_2)^2}\right)$$

da controllare

$$-i\, e^{-iq_1}\cdot\left(\frac{e^{iq_1}}{p_1^2} + \frac{e^{i(q_1-q_2)}}{(p_1-p_2)^2}\right) + - - - - -$$

$$= c_{2,0}(p)\, e^{i2q_1} + c_{2,1}(p)\, e^{i(2q_1-q_2)} + c_{2,-2}(p)\, e^{i(2q_1-2q_2)} + c_{0,1}(p)\, e^{iq_2} + \dots + c.c.$$

in rosso le parti da escludere dal dominio delle azioni perché t.c. $k\cdot\omega(p)=0$

Per risolvere l'eq. $L_{H_0}\Phi_2 = \{H_1, \Phi_1\}$ devo introdurre denom. del tipo $k\cdot\omega(p)$ in corrisp. a ogni termine $c_k(p)\, e^{ik\cdot q}$ $\Longrightarrow$

Bisogna escludere la superficie risonante $\underline{k}\cdot\underline{\omega}(\underline{p})=0$

Esempio in corrisp. al termine

$$c_{2,-1}(\underline{p})\, e^{i(2q_1-q_2)} \quad \text{bisogna escludere } 2\omega_1-\omega_2 = 2p_1-p_2=0$$

$$\omega_1 = \frac{\partial H_0}{\partial p_1} = \frac{\partial \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)}{\partial p_1}$$

Definiz. : Sia $\mathcal{F}_s$ la classe di funzioni t.c.

$$f(\underline{p},\underline{q}) \in \mathcal{F}_s \quad \text{sse} \quad f(\underline{p},\underline{q}) = \sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n \\ |\underline{k}|\leq s}} c_{\underline{k}}(\underline{p})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}} \quad \text{dove } |\underline{k}| = |k_1|+\dots+|k_n|$$

Es. : $H_0 \in \mathcal{F}_0$, $H_1 \in \mathcal{F}_2$, $\Phi_0 \in \mathcal{F}_0$, $\Phi_1 \in \mathcal{F}_2$, $\Phi_2 \in \mathcal{F}_4$

Congettura: $\Phi_s \in \mathcal{F}_{2s}$ (cioè hanno sviluppo di Fourier finito)

Dim.: (cenno) si deve dim. che se $\Phi_r \in \mathcal{F}_{2r}$, allora $\{H_1, \Phi_r\} \in \mathcal{F}_{2r+2}$

Congettura: al crescere di s le superfici risonanti da togliere fino all'ordine ε^s di costruzione di Φ andranno a ricoprire densamente G.

Come appirare il th. di Poincaré?

Osserviamo che se $H_0 = \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2$

allora $\det(\mathrm{Hess}\, H_0) = \det(\mathrm{Jac}(\omega_1, \omega_2)) = 0$,

$\Rightarrow$ viene meno la non degenerazione.

In laboratorio stiamo considerando

$$H(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}\left[\omega_1 (x_1^2 + y_1^2) + \omega_2 (x_2^2 + y_2^2)\right] + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(\underline{x}, \underline{y})$$

con f_ℓ pol. omogeneo di grado ℓ.

Introduciamo $(\underline{x}', \underline{y}')$ t.c. $\underline{x} = \varepsilon \underline{x}'$, $\underline{y} = \varepsilon \underline{y}'$

$$\Rightarrow H' = \frac{1}{\varepsilon^2} H(\underline{x}, \underline{y})\Big|_{\substack{\underline{x}=\varepsilon \underline{x}' \\ \underline{y}=\varepsilon \underline{y}'}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \omega_j \left(x_j'^2 + y_j'^2\right) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s f_{s+2}(\underline{x}', \underline{y}')$$

f_{s+2} di grado $s+2$ — Poniamo $\begin{cases} x'_j = \sqrt{2p_j}\cos q_j \\ y'_j = \sqrt{2p_j}\sin q_j \end{cases}$

$$\Rightarrow H(\underline{p}, \underline{q}; \varepsilon) = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s f_{s+2}(\underline{p}, \underline{q}) \qquad \underline{p}^{\underline{\ell}} = p_1^{\ell_1} \cdots p_n^{\ell_n}$$

dove $f_{s+2} = O\left(\|\underline{p}\|^{\frac{s+2}{2}}\right)$ e lo sv. di Fourier $f_{s+2}(\underline{p},\underline{q}) = \sum_{\underline{\ell}, \underline{k}} c_{\underline{\ell}\underline{k}}\, \underline{p}^{\underline{\ell}/2} e^{i\underline{k}\cdot\underline{q}}$

$\underline{k}$ t.c. k_j e ℓ_j stessa parità, $|k_j| \le \ell_j$, con $|\underline{\ell}| = s+2$

Per un problema del genere (con parte integrabile isocrona) i "picc. divisori" $\underline{k}\cdot\underline{\omega}(\underline{p}) = \underline{k}\cdot\underline{\omega}$ ← cost.

Possiamo scegliere $\underline{\omega}$ in modo che sia il più "non-risonante" possibile?

Sì, se ci scegliamo $\underline{\omega}$ diofanteo.

Def.: $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^n$ si dice diofanteo se $\exists (\gamma, \tau) \in \mathbb{R}_+^2$ t.c. $\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n$ allora $|\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \geq \dfrac{\gamma}{\|\underline{k}\|^\tau}$ $\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}$

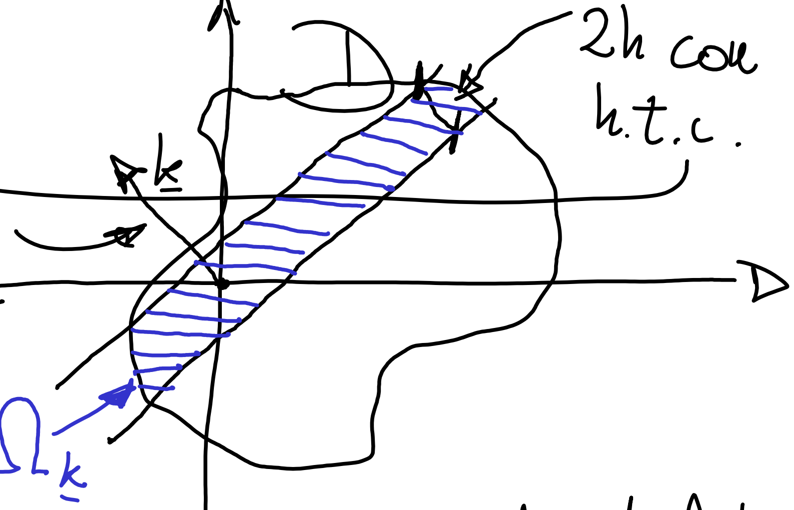
Prop.: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, t.c. $\operatorname{diam} D < +\infty$, allora la misura dei non-diofantei in D è nulla.

Dim.: Poniamo $\Omega_{\underline{k}} = \{ \underline{\omega} \in D : |\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \leq \Psi(\|\underline{k}\|) \}$ con $\Psi(\|k\|) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$|\underline{k}\cdot\underline{\omega}| \leq \Psi(|\underline{k}|)$$

$$\left|\underline{\omega}\cdot\frac{\underline{k}}{\|\underline{k}\|}\cdot\|\underline{k}\|\right| \leq \Psi(|\underline{k}|)$$

$$\frac{\underline{k}}{\|\underline{k}\|} = \underline{e}_{\underline{k}}$$

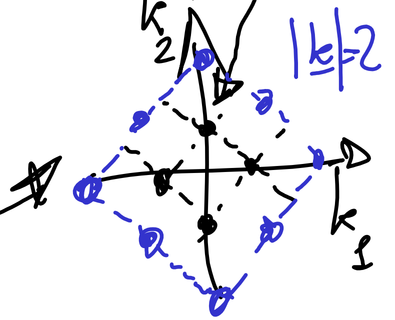


$$h = |\underline{\omega}\cdot\underline{e}_{\underline{k}}| \leq \frac{\Psi(|\underline{k}|)}{\|\underline{k}\|} \leq \frac{\Psi(|\underline{k}|)}{|\underline{k}|}\cdot\sqrt{n}$$

... di gradi di lib.

$$\text{mis}\,\Omega_{\underline{k}} \leq 2h\cdot(\text{diam}\,D)^{n-1} \leq 2(\text{diam}\,D)^{n-1}\cdot\sqrt{n}\cdot\frac{\Psi(|\underline{k}|)}{|\underline{k}|}$$

$$\sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underline{0}\}} \text{mis}\,\Omega_{\underline{k}} \leq 2(\text{diam}\,D)^{n-1}\cdot\sqrt{n}\sum_{s=1}^{+\infty}\sum_{|\underline{k}|=s}\frac{\Psi(s)}{s}$$



$$\leq 2^{n+1}(\text{diam}\,D)^{n-1}\cdot\sqrt{n}\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{(s+1)^{n-1}}{s}\Psi(s)$$

$$\leq \text{costanti}\sum_{s=1}^{+\infty} s^{n-2}\Psi(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{|\underline{k}| \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \text{mis}\, \Omega_{\underline{k}} \le r \cdot \text{costanti} \sum_{s=1}^{+\infty} s^{n-2-\tau} \; = O(r)} \quad \text{se } \tau > n-1$$

converge!

se sostituiamo $\psi(s)$ con $\dfrac{r}{s^{\tau}}$

Se poniamo $\Omega = \left\{ \underline{\omega} \in D : |\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \geq \dfrac{r}{|k|^{\tau}} \ \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \right\}$

$$\text{mis}\, D - \text{mis}\, \Omega = O(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

I non diofantei sono (in misura) sovrastimati da un infinitesimo, quindi sono di mis. nulla.

C.V.D.

Proposizione: $\nexists\ \underline{\omega} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

con $|\underline{k} \cdot \underline{\omega}| \geq \dfrac{\gamma}{|\underline{k}|^\tau}$ $\forall\ \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}$

con $\gamma > 0$ e $\tau < n-1$.

Inoltre, la misura di Lebesgue degli $\underline{\omega}$ diofantei con $\tau = n-1$ è nulla.

Infine la suddetta misura è positiva (e $O(\gamma)$ all'interno dei compatti) $\forall\ \tau > n-1$.

Si ricordi che

i numeri algebrici, cioè $\alpha = \dfrac{m+\sqrt{n}}{p}$

con $m, n, p \in \mathbb{Z}$ sono diofantei con $\tau = 1$

nel senso che $\boxed{\left|k_1 \alpha + k_2\right| \geq \dfrac{\gamma}{|\underline{k}|} \quad \forall\, \underline{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\underline{0}\}}$

$\Rightarrow \forall\, (\omega_1, \omega_2)$ t.c. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha$ (diofanteo)

è a sua volta diofanteo.