

Problema generale della dinamica (secondo Poincaré)

Si consideri un sistema hamiltoniano associato
a una hamiltoniana $H = H(\mathbb{P}, \mathbb{Q}; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$
dove $H_0 = H_0(\mathbb{P})$, analitica in $G \times \mathbb{T} \times B_2(0)$
con G aperto di $\mathbb{R}^k$ e $B_2(0)$ in $\mathbb{R}^2$.

Quando $\varepsilon = 0$, $H = H_0(\mathbb{P})$ il problema è integrabile, ci chiediamo se il sistema è integrabile anche per $\varepsilon \neq 0$.

Ci poniamo il problema di determinare
 Φ t.c. $\{\Phi, H\} = 0$ -

Consideriamo $\Phi(p, q; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s \Phi_s(p, q) = \Phi_0(p, q) + \varepsilon \Phi_1(p, q) + \dots$

Da $\{\Phi, H\} = 0 \Rightarrow \{\Phi_0, H_0\} = 0$ all' $O(\varepsilon^0)$

È il sistema
 ricorsivo per
 det. l'int. primo Φ

$\Rightarrow \{\Phi_1, H_0\} = -\{\Phi_0, H_1\}$ all' $O(\varepsilon)$

$\Rightarrow \{\Phi_s, H_0\} = -\{\Phi_{s-1}, H_1\} - \{\Phi_{s-2}, H_2\} - \dots - \{\Phi_0, H_s\} \doteq \Psi_s(p, q)$ all' $O(\varepsilon^s)$

$$\text{Siccome } \Psi_s(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} c_k(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}}$$

$$\bar{\Phi}_s(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} \psi_k(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}}$$

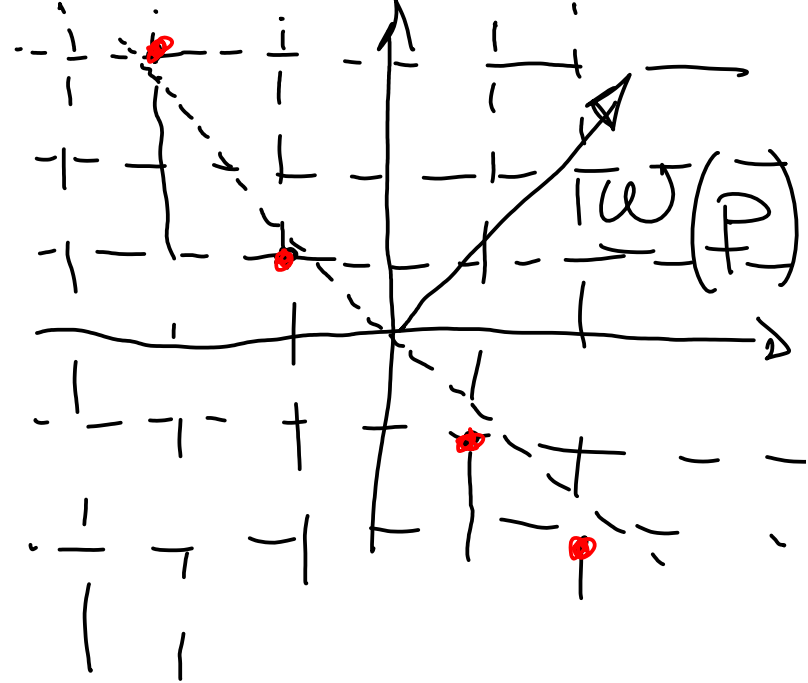
$$\Rightarrow L_{H_0} \bar{\Phi}_s := \left\{ \bar{\Phi}_s, H_0, \dots \right\} = \bar{\Psi}_s \Rightarrow \left[\sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} \sum_{j=1}^u \psi_k(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}} \cdot i \underline{k}_j \frac{\partial H_0}{\partial \underline{p}_j} \right]$$

$$\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^u \text{ abbiamo } \left[\begin{aligned} &= \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} c_k(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}} \end{aligned} \right]$$

$$\frac{i \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}) \cdot \psi_k(\underline{p})}{\underline{\omega}(\underline{p}) = \text{Jac}(H_0)} = c_k(\underline{p}) \quad \text{se } \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}) \neq 0$$

incognita
nota
 $\Rightarrow \psi_k(\underline{p}) = c_k(\underline{p}) / [i \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p})]$

Nei p.ti evidenziati in rosso
in $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{Z}^2$ a dx.) abbiamo che
 $\underline{k} \cdot \underline{w}(P) \simeq 0$



Problema dei piccoli divisori!

Assumiamo allora che $\det(\underline{k} \cdot \underline{w}(P)) \neq 0$
Prop. se $\{H_0, H_1\} = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_0 = \underline{\Phi}_0(P)$ dove $w_i(P) = \frac{\partial H}{\partial P_i}(P)$

Def.: Diciamo che $H(P, Q; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(P, Q), t.c.$
 $H_0 = H_0(P)$ e $\det(\text{Hess } H_0) = \det\left(\frac{\partial w_i}{\partial P_j}(P)\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$, è ausiliario

Direi: Sia $\Phi_0(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}}$

Da $0 = \left\{ \Phi_0, H_0 \right\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_j} \frac{\partial H_0}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_j} \omega_j(\underline{p})$

$$= \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j=1}^n i k_j \omega_j(\underline{p}) \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}} =$$

$$= \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \underbrace{i(\underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}))}_{=0} \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{q}} \quad \boxed{\forall \underline{k} \neq \underline{0}}, \text{ affinché sia } \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) = 0$$

$\Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}) = 0 \quad \forall \underline{p} \in \mathcal{G}(\text{dominio di } \underline{p})$

per derivazione $\underline{k} \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \underline{p}_j}(\underline{p}) = 0 \Rightarrow 0 = \text{Hess}(H_0) \cdot \underline{k}$

$\forall j=1, \dots, n \quad \Rightarrow 0 = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial p_j}(\underline{p}) \right)_{i,j=1,\dots,n} \cdot \underline{k}$

$\Rightarrow \underline{k} = \underline{0}$ assurdo $\Rightarrow \varphi_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0 \quad \forall \underline{k} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \Phi_0 = \varphi_0(\underline{r})$

C.V.D.

Teorema (di un'esistenza degli integrali primi di Poincaré)

Sia $H(\underline{r}, \underline{p}; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(\underline{r}, \underline{p})$ con $H_0 = H_0(\underline{r})$

t.c. (1) $\det \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial p_j} \right)_{i,j=1,\dots,u} = \det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right)_{i,j=1,\dots,u} \neq 0$

(non degenerazione)

(2) $h_{\underline{k}}(\underline{r}) \neq 0 \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^u$ se $\underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{r}) = 0$ (genericità, dove $H(\underline{r}, \underline{p}) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} h_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{p}}$)

Allora $\nexists \Phi(F, g; \varepsilon)$ integrale primo e analitico
che sia indipendente da H .

Schemi della dimostrazione

(1) $\Phi_0 = \Phi_0(F)$ dove $\boxed{\Phi(F, g; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \Phi_s(F, g) \varepsilon^s}$

(2) Se Φ_0, H_0 sono indep. allora lo sono anche Φ, H
Se Φ, H sono indep. allora si può def. $\Phi'(F, g; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \Phi'_s(F, g) \varepsilon^s$
t.c. $\Phi'_0 = \Phi'_0(F)$ e Φ'_0, H_0 sono indep., $\{\Phi', H\} = 0$, cioè Φ' è cost. del moto.

③ da $\{\Phi_1, H_0\} = -\{\Phi_0, H_1\} \Rightarrow \Phi_0 \text{ e } H_0 \text{ sono dipendenti tra loro.}$

Dim. del Lemma ②. È banale che se Φ_0, H_0 sono indep, allora Φ, H indep, poiché

I_{ij} t.c. $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \end{pmatrix} \neq 0$

Infatti, I_{ij} t.c. è diverso da zero (per ipotesi) $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial p_j} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_j} \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial q_i} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial q_i} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon) \neq 0$$

per ε picc.
abbastanza.

Siano Φ, H indep. (cioè $\{\Phi, H\} = 0$) e assumiamo
 che Φ_0 dip. da H_0 , allora $\Phi_0 = \Phi_0(H_0)$ è analitica,
 poiché $\Phi_0 = \Phi_0(\overline{z})$ e $\det(\text{Hess } H_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial H_0}{\partial p_1} \neq 0$ (cioè $\omega(\overline{z}) \neq 0$)
 $\Rightarrow$ (per il th. della funz. implicita) $p_1 = p_1(H_0, p_2, \dots, p_n)$ è analitica.

$\Phi = \Phi_0(P_1(H_0, P_2, \dots, P_n), P_2, \dots, P_n)$ è analitica

$\Rightarrow \Phi_0 = \Phi_0(H_0)$ è analitica

(vale per ipotesi) Casioleviano $\Psi := \Phi - \Phi_0(H)$

$$\text{Dss. 1: } \{\Psi, H\} = \{\Phi, H\} - \{\Phi_0(H), H\} = 0 - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_0}{dH} \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{d\Phi_0}{dH} = 0$$

$$\text{Dss. 2: } \Psi = \sum_{s=0}^{+\infty} \Psi_s(p, q) \varepsilon^s \text{ dove } \Psi_0 = \Phi - \Phi_0(H_0) = 0$$

$$\text{Def. } \Phi' = \frac{\Psi}{\varepsilon} = \Phi'_0(p) + \varepsilon \Phi'_1(p, q) + \dots$$

$0 \neq \Phi_0, H_0$ sono indist. tra loro oppure
 iterando all'infinito abbiamo l'essendo che $\Phi = \Phi(H)$
 C.V.D. (per lemma ②)

Dim. (dal lemma ③), cioè se $L_{H_0} \Phi_1 = -\{\Phi_0, H_1\}$
 $\Rightarrow \Phi_0 = \Phi_0(H_0)$. Prendiamo $\Phi_1(p, q) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \psi_{\underline{k}}(p) e^{i\underline{k} \cdot \underline{q}}$
 e $H_1 = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} h_{\underline{k}}(p) e^{i\underline{k} \cdot \underline{q}}$, allora $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} i\underline{k} \cdot \underline{w}(p) \psi_{\underline{k}}(p) e^{i\underline{k} \cdot \underline{q}} =$
 $= + \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_j} k_j h_{\underline{k}}(p) e^{i\underline{k} \cdot \underline{q}}$, proiettiamo l'eq. su $e^{i\underline{k} \cdot \underline{q}}$

$$\Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}) \quad \varphi_{\underline{k}}(\underline{p}) = \sum_{j=1}^n k_j \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_j}(\underline{p}) \quad \vdots \quad h_{\underline{k}}(\underline{p}) \neq 0 \text{ per ipotesi}$$

Ci occupiamo di risolvere sulle varietà risultanti
 $\underline{k} \cdot \underline{\omega}(\underline{p}) = 0 \Rightarrow \underline{k} \cdot \text{Jac } \Phi_0 = 0$

Anzi, consideriamo quando $\dim(\mathcal{M}_{\underline{\omega}}) = n-1$.

$\exists \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ linearmente indep. $\in \mathcal{M}_{\underline{\omega}}$

t.c. $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-1}$ sono ortogonali a $\underline{\omega}(\underline{p})$ e $\text{Jac } \Phi_0$.

$$\Rightarrow \forall i \neq j = 1, \dots, n \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial p_j} & \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_j} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H_0 \text{ e } \Phi_0 \text{ non sono indep. tra loro.}$$

$\Phi_0 = \Phi_0(H_0)$

