

Problema generale della dinamica (secondo Poincaré)

Si consideri un sistema hamiltoniano associato
a una hamiltoniana $H = H(\mathbb{P}, \mathbb{Q}; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s H_s(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$
dove $H_0 = H_0(\mathbb{P})$, analitica in $G \times \mathbb{T} \times B_2(0)$
con G aperto di $\mathbb{R}^k$ e $B_2(0)$ in $\mathbb{R}^2$.

Quando $\varepsilon = 0$, $H = H_0(\mathbb{P})$ il problema è integrabile, ci chiediamo se il sistema è integrabile anche per $\varepsilon \neq 0$.

Ci poniamo il problema di determinare
 Φ t.c. $\{\Phi, H\} = 0$ -

Consideriamo $\Phi(p, q; \varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s \Phi_s(p, q) = \Phi_0(p, q) + \varepsilon \Phi_1(p, q) + \dots$

Da $\{\Phi, H\} = 0 \Rightarrow \{\Phi_0, H_0\} = 0$ all' $O(\varepsilon^0)$

È il sistema
 ricorsivo per
 det. l'int. primo Φ

$\Rightarrow \{\Phi_1, H_0\} = -\{\Phi_0, H_1\}$ all' $O(\varepsilon)$

$\Rightarrow \{\Phi_s, H_0\} = -\{\Phi_{s-1}, H_1\} - \{\Phi_{s-2}, H_2\} - \dots - \{\Phi_0, H_s\} \doteq \Psi_s(p, q)$ all' $O(\varepsilon^s)$

$$\text{Siccome } \Psi_s(\mathbb{F}, q) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} c_k(\mathbb{F}) e^{i \underline{k} \cdot q}$$

$$\bar{\Phi}_s(\mathbb{F}, q) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} \psi_k(\mathbb{F}) e^{i \underline{k} \cdot q}$$

$$\Rightarrow L_{H_0} \bar{\Phi}_s := \left\{ \bar{\Phi}_s, H_0, \dots \right\} = \bar{\Psi}_s \Rightarrow \left[\sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} \sum_{j=1}^u \psi_k(\mathbb{F}) e^{i \underline{k} \cdot q} \cdot i k_j \frac{\partial H_0}{\partial p_j} \right]$$

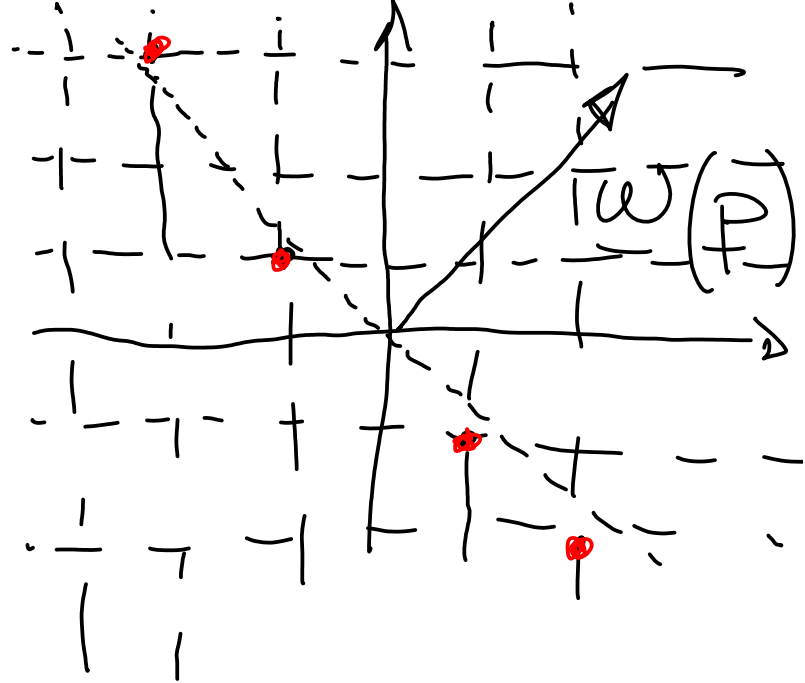
$$\forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^u \text{ abbiamo } \left[= \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^u} c_k(\mathbb{F}) e^{i \underline{k} \cdot q} \right]$$

$$\frac{i \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\mathbb{F}) \cdot \psi_k(\mathbb{F})}{\underline{\omega}(\mathbb{F}) = \text{Jac}(H_0)} = c_k(\mathbb{F}) \quad \text{se } \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\mathbb{F}) \neq 0$$

$\nearrow$ incognita $\nwarrow$ noto

$$\psi_k(\mathbb{F}) = c_k(\mathbb{F}) / [i \underline{k} \cdot \underline{\omega}(\mathbb{F})]$$

Nei p.ti evidenziati in rosso
in $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{Z}^2$ a dx.) abbiamo che
 $\underline{k} \cdot \underline{\omega}(P) \simeq 0$

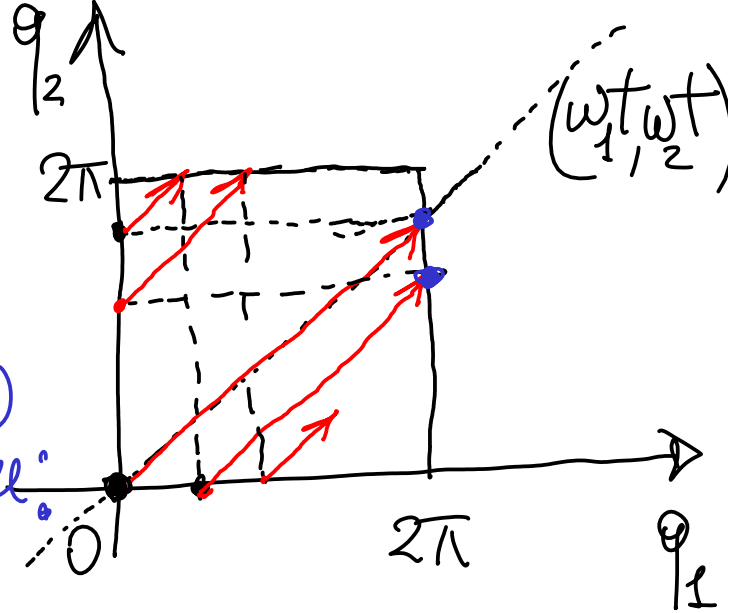


Problema dei piccoli divisori!

Inanzitutto cerchiamo di capire meglio
le sol. del prob. associate a $H_0 = H_0(P)$, quindi
 $\dot{P}(t) = 0 \Rightarrow P(t) = P(0) \Rightarrow$ il moto si svolge su $P = P(0) \times \mathbb{R}^n$
 $\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}(P(0)) =: \omega_i \Rightarrow \underline{\omega} = \text{Jac}(H_0) \Rightarrow \dot{q} = \underline{\omega} \Rightarrow q(t) = q(0) + \underline{\omega} \cdot t$

Tutti quasi periodici sui tori
 Consideriamo per semplicità $\mathbb{T}^2$

|| i p.t. seguenti inclusi:



Essi sono inclusi in $\{j\alpha \bmod 2\pi\}$ con $\alpha = \frac{\omega_2 \cdot 2\pi}{\omega_1}$

perché sono t.c. all'istante di tempo t_j , $q_1 = j \cdot 2\pi$
 $\Rightarrow \omega_1 t_j = j \cdot 2\pi \Rightarrow t_j = \frac{j \cdot 2\pi}{\omega_1} \Rightarrow q_2(t_j) = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot j \cdot 2\pi$

Proposizione: il moto su $\mathbb{T}^2$ è periodico sse $\alpha \in \mathbb{Q}$.
 Dim. (suff.) se il moto è periodico $\exists j$ t.c., $j\alpha = k \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{j} \in \mathbb{Q}$.

Proposizione: L'orbita riempie densamente $\mathbb{T}^2$

sse $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow \nexists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0$

Def.: $\forall \underline{\omega} \in \mathbb{R}^n$ si dice modulo resonante

l'insieme $M_{\underline{\omega}} = \{ \underline{k} \in \mathbb{Z}^n : \underline{k} \cdot \underline{\omega} = 0 \}$
 è un gruppo

Proposizione: l'orbita $\{ \underline{\omega} \cdot t \in \mathbb{T}^n : t \in \mathbb{R} \}$ riempie densamente $\mathbb{T}^n$ sse $M_{\underline{\omega}} = \{ \underline{0} \}$

Proposizione: l'orbita $\{ \underline{\omega} \cdot t \in \mathbb{T}^n : t \in \mathbb{R} \}$ riempie densamente un sottospazio di $\mathbb{T}^n$ che ha $\dim = n - \dim M_{\underline{\omega}}$

Per la direzione - si mostra che si può costruire
 una base ^{di $\mathbb{Z}^n$} $\{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_2, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-2} \}$ con $2 = \dim \{ \mathcal{M}_\omega \}$

t.c. $\det(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_2, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-2}) = \pm 1$, cioè formano una
 matrice unimodulare $\Rightarrow$ è una base di $\mathbb{Z}^n$ per cui ha
 sistemi a coeff. interi.

$\Rightarrow M = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_2, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-2})$ con $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_2 \in \mathcal{M}_\omega$

$\Rightarrow$ siano $\underline{Q}$ cost., t.c. $\underline{Q} = \Pi \underline{q}$ segue che $\underline{q} = 2\pi \underline{k}$ ^{con $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$}

allora $\underline{Q} = 2\pi \underline{k}^*$ con $\underline{k}^* \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow \underline{Q}_1, \dots, \underline{Q}_n$ sono angoli
 $\underline{Q}_j = 0$ con $j=1, \dots, 2$ perché $\underline{e}_1 \cdot \underline{\omega} = \dots = \underline{e}_2 \cdot \underline{\omega} = 0$

Def. si dice che il moto è completamente
risolubile se dice $(M_w) = n-1$ -

$\Rightarrow$ il moto si svolge in una direzione che
torna all'origine dopo un periodo T e ~~osservo~~
introduco $n-1$ eq. t.c. - $\dot{Q}_1 = \dots = \dot{Q}_{n-1} = 0$

$\Rightarrow$ $\dot{Q}_n = \omega_n \Rightarrow Q_1(t) = Q_1(0), \dots, Q_{n-1}(t) = Q_{n-1}(0)$

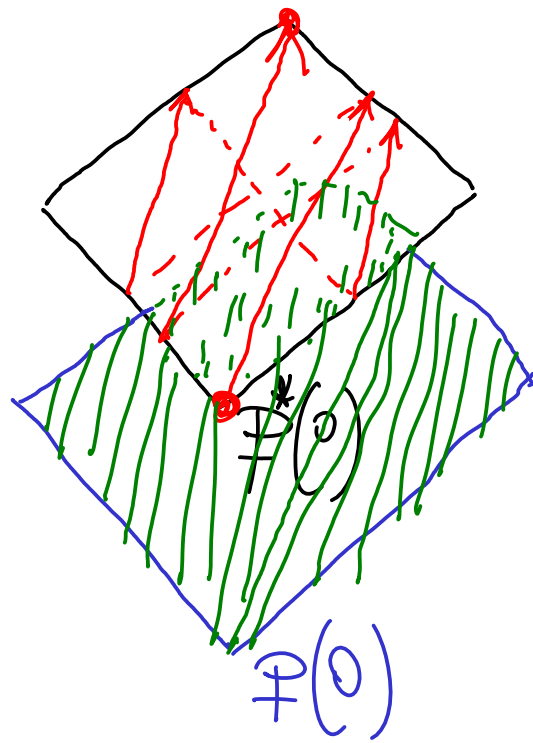
$$Q_n(t) = Q_n(0) + \omega_n t -$$

$\Rightarrow \underline{\omega} = \alpha \underline{u}$ con $\underline{u} \in \mathbb{Z}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ -

La dimensione di $\mathcal{M}_{\omega}(\mathbb{F})$?

$$\text{Se } \det(\underline{\text{Jac}}(\underline{\omega})) = \\ = \det(\underline{\text{Hess}}(H_0)) \neq 0$$

allora $\mathcal{M}_{\omega}(\mathbb{F})$ cambia
continuamente dimensione
al variare di $\mathbb{F}$ -



Assumiamo allora che $\det(\text{Jac}(\omega(\mathbb{F})) \neq 0$
Prop. se $\{\Phi_0, H_0\} = 0 \Rightarrow \Phi_0 = \Phi_0(\mathbb{F})$ -