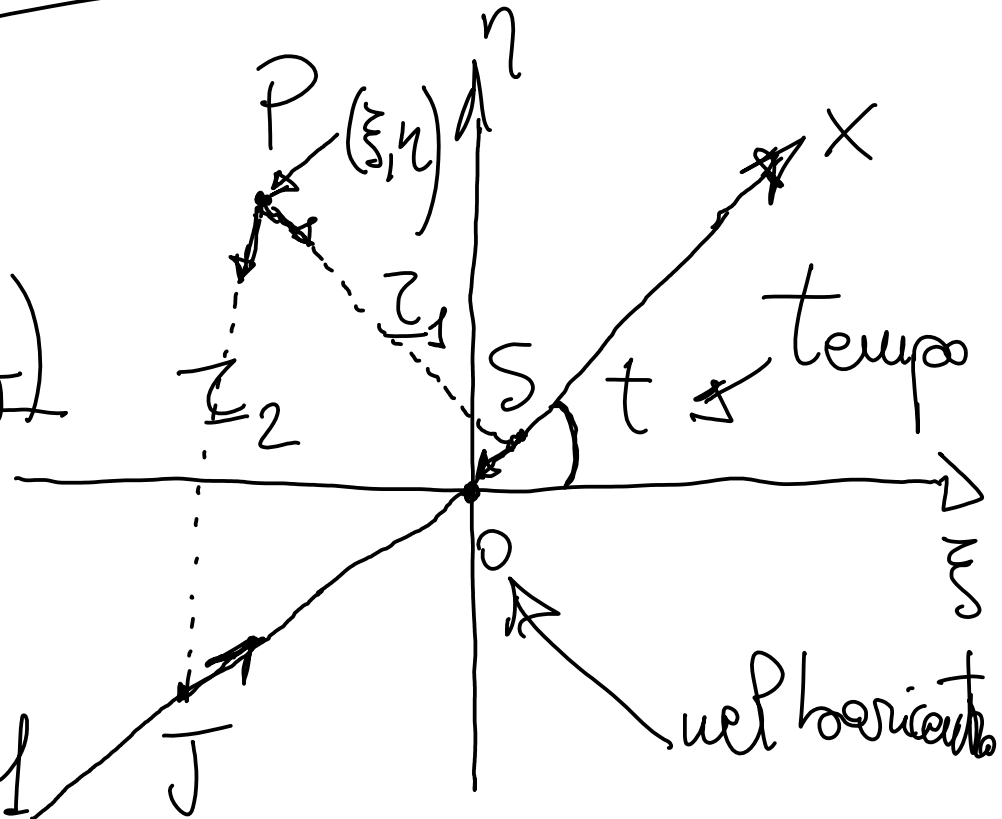


Problema dei tre corpi ristretto circolare piano (PCRTBP)

$\overline{SJ} = 1$, dalla 3^a legge
di Keplero: $\frac{\overline{SJ}^3}{T^2} = \frac{G(m_s + m_J)}{4\pi^2}$

$m_s + m_J = 1$, $m_J = \mu \Rightarrow m_s = 1 - \mu$
 $T = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} = G \cdot \frac{1}{4\pi^2} \Rightarrow G = 1$



la hamiltoniana. è data da

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x y - P_y x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

le cui corrisp. eq. del moto sono

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = P_y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-\mu+1), & \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x + y \\ \dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = P_x - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y, & \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = P_y - x \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni stazionarie t.c.

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow P_x = -y, P_y = x \quad \text{e} \quad \dot{P}_x = \dot{P}_y = 0$$

Osserviamo che l'eq. $\dot{p}_y = 0$ è risolta quando

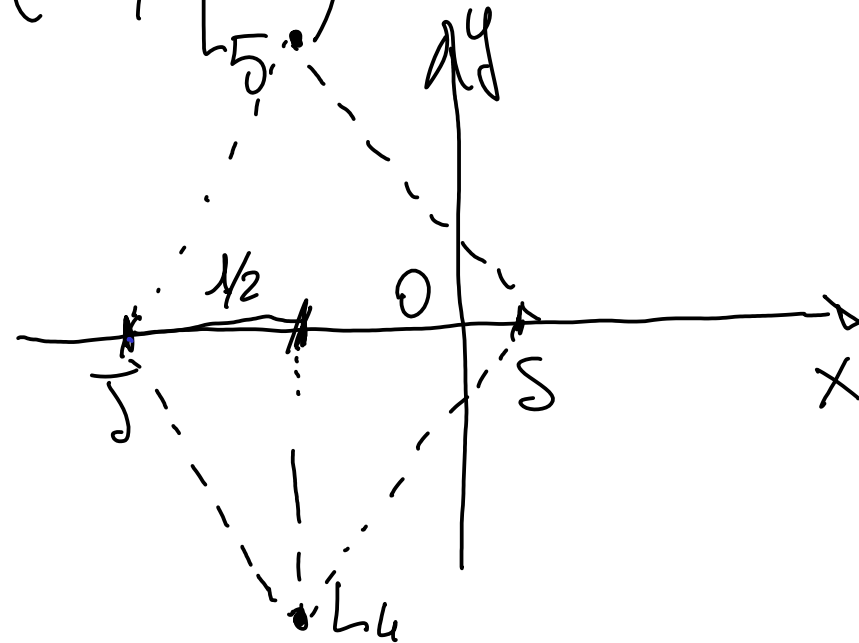
$$z_1 = z_2 = 1, \text{ poiché } \frac{1-\mu}{1} + \frac{\mu}{1} = 1$$

e anche l'eq. $\dot{p}_x = 0$ è risolta quando $z_1 = z_2 = 1$

$$\text{poiché } x - (1-\mu)(x-\mu) - \mu(x-\mu+1) = 0$$

Si ottengono quindi altre
2 soluzioni stazionarie

$$L_4 = \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ e } L_5 = \left(\mu - \frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



Se consideriamo anche i nuovi
le soluzioni stazionarie sono
date da

$$(P_x, P_y, X, Y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

il segno sopra è per L_4 e sotto è per L_5 -

Cerchiamo di studiare le eq. del moto linearizza-
te attorno a L_4/L_5 , a questo scopo introduciamo
le nuove coord. canoniche (P_x, P_y, X, Y) tali che

$$P_x = P_X \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad P_y = P_Y + \mu - \frac{1}{2}, \quad x = X + \mu - \frac{1}{2}, \quad y = Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(tutte le trasformazioni di coordinate sono canoniche, perché è evidente che preservano le $\{ \cdot, \cdot \}$).

Scriviamo allora l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate, cioè

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2} \left[\left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(P_y + \mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}}$$

Inoltre (al fine di poter scrivere le eq. del moto linearizzate nei pressi di L_4/L_5), è conveniente fare le espansioni in serie di Taylor (truncata quasi subito ---) dell'Hamiltoniano

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \underbrace{-\frac{3}{2} + \frac{P_x^2}{2} - \frac{P_y^2}{2}}_{\text{costanti additive}} + (P_x P_y X Y) Q \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix} + o\left(X^2 + Y^2\right),$$

dove la matrice associata alla forma quadratica

è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \pm \gamma \\ 1 & 0 & \pm \gamma & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

suddeite
 Le espansioni in serie di Taylor della
 Ham. $H(P_x, P_y, X, Y)$ si ottengono facilmente
 con Mathematica: si veda il file
 app-quad-L4oL5.nth

$$\Rightarrow \text{ciò è per } \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.03852 \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \omega_2$$

$$\text{dove } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$$

$\Rightarrow$ Vogliamo esprimere la Ham. nella forma

$$H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \text{costanti} + \frac{1}{2} \omega_1 (\vec{p}_1^2 + \vec{q}_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (\vec{p}_2^2 + \vec{q}_2^2) + o(\|(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2)\|^2)$$

Vogliamo determinare una matrice
 Ort. $(P_x, P_y, X, Y)^T = U(P_1, P_2, q_1, q_2)^T$ è
 la trasf. che ci permette di scrivere H
 come sopra e con $U^T J U = J$.

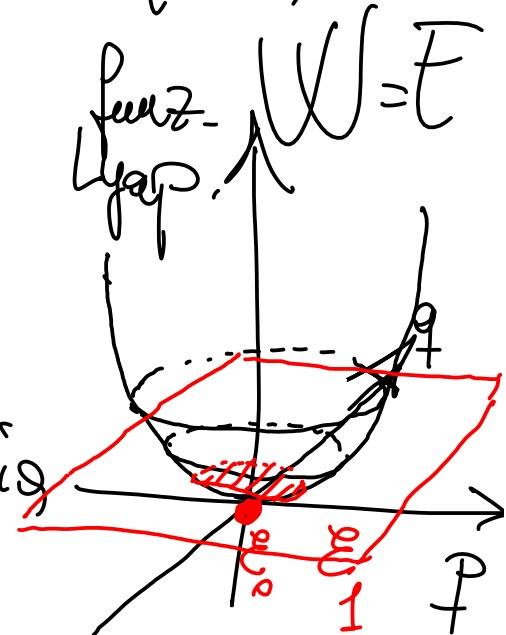
Determiniamo U usando Mathematica
 così come spiegato in diag-sympl Vol 5. p. 11

$$H(p, q) = \text{cost.} + \frac{\omega_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) - \frac{\omega_2}{2} (p_2^2 + q_2^2) + o(\| (p, q) \|^2)$$

dove w_1 e w_2 sono positivi e.t.c.

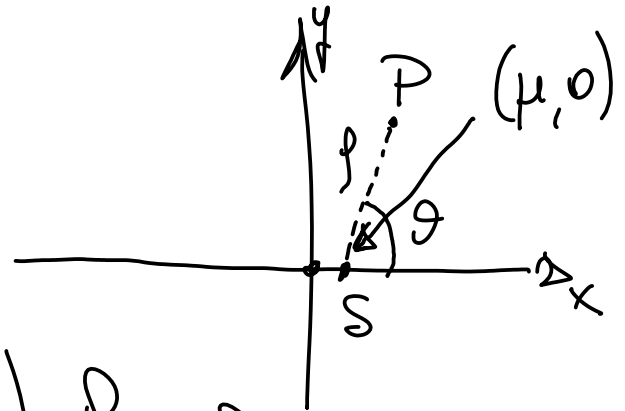
$$w_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}} \Rightarrow w_1 \approx 1 - O(\mu) \\ \Rightarrow w_2 \approx O(\sqrt{\mu})$$

Se w_1 e w_2 fossero concordi allora
potremmo concludere subito che
è localmente stabile (si usi l'energia
come funzione di Lyapunov)



Vogliamo introdurre coordinate biocentriche polari (nel piano simbole):

$$x = \mu + \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$



$$S(P_x, P_y, \rho, \theta) = P_x(\mu + \rho \cos \theta) + (P_y - \mu) \rho \sin \theta$$

$$\Rightarrow x = \frac{\partial S}{\partial P_x}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial P_y}$$

$$\rho = \frac{\partial S}{\partial \rho} = P_x \cos \theta + (P_y - \mu) \sin \theta$$

$$P_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = -P_x \rho \sin \theta + (P_y - \mu) \rho \cos \theta$$

All'equilibrio, cioè $(P_x, P_y, x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \mu - \frac{1}{2}, \mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$$\Rightarrow (P_p, P_\theta, p, \vartheta) = \left(0, 1, 1, +\frac{2\pi}{3}\right) \text{ in } L_{4,5}$$

Bisogna scrivere

$$H(P_p, P_\theta, p, \vartheta) = \frac{1}{2} \left(P_p^2 + \cancel{P_\theta^2} \right) - \frac{\mu^2}{2} - P_\theta - \mu p \cos \vartheta$$

$$- \frac{1-\mu}{p} - \frac{\mu}{\sqrt{1+2p\cos\vartheta+p^2}}$$

Successivamente, si supponi vicino a $L_{4,5}$, cioè ponendo $P_p = P'_X$, $P_\theta = Y+1$, $p = X+1$, $\vartheta = Y + \frac{2\pi}{3}$.