

— 0 —

Teorema (di Arnold - Jost): Siano $\mathcal{I}_f(P, q), \dots, \mathcal{I}_n(P, q)$
 un sistema completo di integrali primi in
 involuzione per la Ham. $H = H(P, q)$. Sia M_c
 una componente ^{n-dim.} compatta e compatta dell'insieme
 $\{(P, q) : \mathcal{I}_i(P, q) = c_i\}$, allora
 $\exists$ un intorno U di M_c (nello spazio delle fasi) t.c.

Γ una trasformazione canonica $\Psi : \mathcal{G} \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{U}$ dove $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$t.c. - (F, g) = \Psi \left(\underline{I}, \underline{\varphi} \right)$ e $H(\Psi(\underline{I}, \underline{\varphi})) = H(\underline{I})$

(cioè sono hamiltoni!)

$\Rightarrow \underline{I}_j(t) = \underline{I}_j(0) \quad \text{e} \quad \underline{\varphi}_j(t) = \underline{\omega}_j(t - t_0) \quad \text{dove} \quad \underline{\omega}_j = \dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial \underline{I}_j}(\underline{I}_j(0))$

Proposizione: Il flusso hamiltoniano induce una transf. canonica

Proposizione: Siano F, G t.c. $\{F, G\} = 0$

allora ① $F(\Phi_G^\tau P, \Phi_G^\tau q) = F(P, q);$

② $\forall t, \tau$ si ha che $\Phi_F^t \Phi_G^\tau(P, q) = \Phi_G^\tau \Phi_F^t(P, q)$

— • La parte nuova parte
da qui sotto • —

$$\phi_{\bar{t}}^t := \phi_{\bar{\Phi}_1}^{t_1} \circ \phi_{\bar{\Phi}_2}^{t_2} \circ \dots \circ \phi_{\bar{\Phi}_n}^{t_n}$$

$\rightarrow \phi_{\bar{t}+\underline{s}}^t = \phi_{\bar{t}}^t \circ \phi_{\bar{s}}^s$

Proposizione: $\forall P, Q \in M_{\underline{c}} \quad \exists \underline{t} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c.}$
 $\phi_{\bar{t}}^t P = Q$

$\Rightarrow$ Su $M_{\underline{c}}$ possiamo utilizzare $\underline{t}$ come coordinate.

Def.: Si dice gruppo stazionario l'insieme
 $G_{\underline{c}} := \{ \underline{t} \in \mathbb{R}^n : \phi_{\bar{t}}^t P = P \quad \forall P \in M_{\underline{c}} \}$

Oss.: è evidentemente un gruppo.
 es. se $\underline{t}_1$ e $\underline{t}_2$ t.c. $\phi^{\underline{t}_1}(\underline{P}) = \phi^{\underline{t}_2}(\underline{P}) = \underline{P}$
 $\forall \underline{P} \Rightarrow \phi^{\underline{t}_1 + \underline{t}_2}(\underline{P}) = \phi^{\underline{t}_1} \circ \phi^{\underline{t}_2}(\underline{P}) = \underline{P}$.

Oss.: G è fatto da p.ti isolati cioè $\forall \underline{t} \in G \exists B_g(\underline{t})$ t.c. $G \cap B_g(\underline{t}) = \underline{t}$.

Proposizione: G è in cor. biunivoca con $\mathbb{Z}^n$.

Proposizione: $\exists$ una base $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$\forall \underline{t} \in G \Rightarrow \underline{t} = \sum_{j=1}^n u_j \underline{e}_j$ con $u_j \in \mathbb{Z} \forall j=1, \dots, n$.

$\tau \rightarrow \phi_{\frac{\tau}{2\pi} e_j}$ è periodica di periodo $2\pi \forall j=1, \dots, n$

$\Rightarrow$ possiamo associare un angolo a τ .

Analogamente, possiamo introdurre $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$
 n angoli per ciascun elemento della base $e_1, \dots, e_n$.

$$\Rightarrow M_C \longleftrightarrow \mathbb{T}^n$$

Questa costruzione degli angoli può essere
"estesa a continuità" anche in un insieme aperto

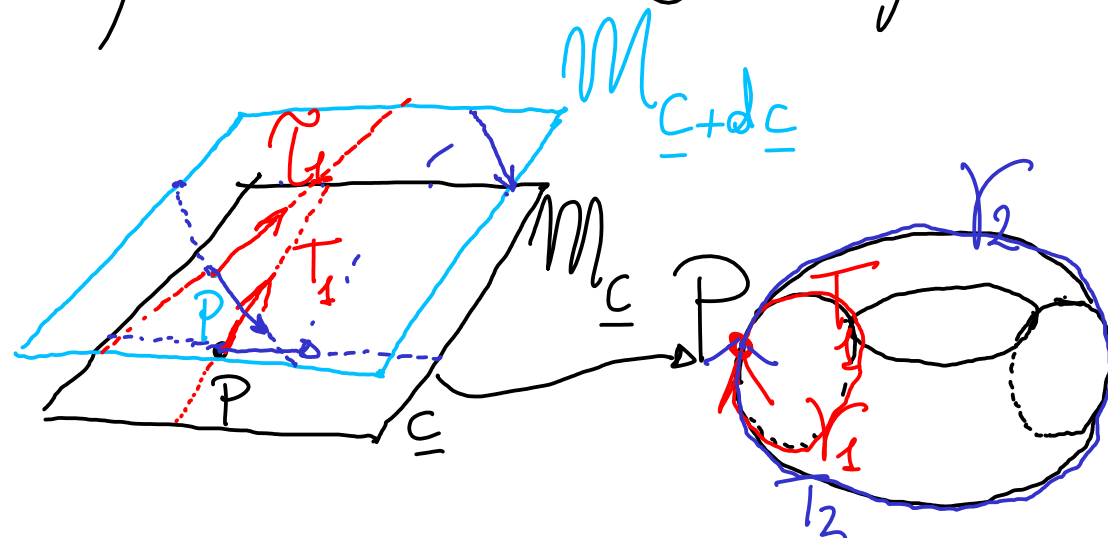
dello spazio delle fasi che include $\mathcal{M}_{\underline{c}}$.

Si riesce a mostrare che

$G_{\underline{\Phi}}$ ha come base dei vettori

$$t.c. \quad \underline{\psi}_j = \underline{e}_j + \frac{\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_n}{\partial \underline{\Phi}_j}(\underline{\Phi}) \quad \text{con} \quad \underline{U}(\underline{\Phi} = \underline{c}) = \underline{0}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\Phi}} S(\underline{\Phi}, \underline{\Theta}) \quad t.c. \quad \underline{\Theta} \text{ sono angoli su } \mathcal{M}_{\underline{\Phi} = \underline{c}}$$



$$\Rightarrow I_j = \frac{\partial S}{\partial \theta_j} \left(\begin{matrix} \underline{I} \\ \underline{\theta} \end{matrix} \right)$$

aziende corrispondenti agli angoli

$$\Rightarrow H = H(\underline{I}) -$$

Costruzione "opportunistica" delle variabili di aziende - angolo -

① Supponiamo di aver individuato n cicli indipendenti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ t.c. - usando

nello sp. delle fasi lungo i flussi indotti
dalle cost. del moto e in direzione dei
cicli si hanno orbite periodiche.

2) Vogliamo costruire $(\underline{I}, \underline{\theta})$ variabili
di azione-angolo (a partire da coord. $(\underline{p}, \underline{q})$) t.c.
 θ_i è l'angolo che "parametrizza" γ_i $\forall i = 1, \dots, n$.

3) Ricordiamo che $(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{L}(\underline{I}, \underline{\theta})$ deve
preservare $\int \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int \sum_{i=1}^n I_i d\theta_i$ con γ generico

$$\Rightarrow \forall j \text{ si ha } \oint_{\gamma_j} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{r_i} dq_i = I_j \oint_{\gamma_j} d\vartheta_j = I_j \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{r_i} dq_i \quad \forall j=1, \dots, n$$

④ Introdurremo $S(I, q) = \sum_{i=1}^n \int p_i(I, q) dq_i$

$$\Rightarrow \vartheta_j = \frac{\partial S}{\partial I_j}, \quad \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \text{ angoli.}$$

Costruzione delle variabili di azione-angolo (di Delaunay) per il problema di Keplero, nel piano, cioè $L(p, \theta, \dot{p}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{p}^2 + p^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{p}$ (con k positivo)

$$H(p, \theta, p, \dot{\theta}) = \frac{1}{2\mu} \left(p^2 + \frac{p^2}{p^2} \right) - \frac{k}{p} \Rightarrow \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad p = 1^+ \text{ è cost.}$$

Possiamo allora un ciclo, si segue il flusso indotto da p
 $\Rightarrow \{p, p\} = 0 = \dot{p}$ (come indotto da $\phi_{T_0}^t$), $\{p, p\} = 0, \{p, \dot{p}\} = 0, \{p, p\} = 0$

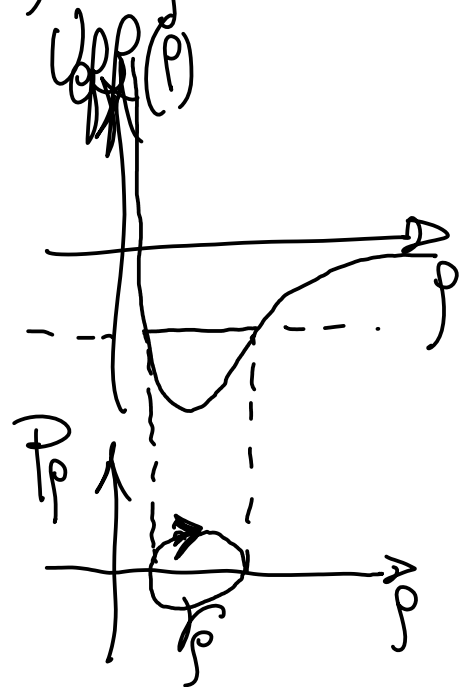
$\rightarrow \dot{\theta} = \{\theta, p_\theta\} = 1$ γ_θ è descritto da $\mathcal{D}$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_\theta} p_\theta d\theta = p_\theta = T$$

Si consideri $H(p, p; T) = \frac{1}{2m} \left(p_p^2 + \frac{T^2}{2mp^2} \right) - \frac{k}{p} = E$

ci da il ciclo γ_p del moto radiale

$$I_p = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_p} p_p dp = \frac{1}{\pi} \int_{p_-}^{p_+} \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(p))} dp$$



Si ricordi che $T(E) = 2\pi \frac{dI_p}{dE} = 2 \int_{-p}^{+p} \frac{2\mu d\varphi}{\sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(\varphi))}}$

Dalla III di Keplero tempo

$$\frac{T(E)}{2\pi} = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} = \sqrt{-\frac{\mu k^2}{(2E)^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dI_p}{dE} = \frac{k\sqrt{\mu}}{(-2E)^{3/2}} \Rightarrow I_p = \int_{E_{\min}}^E \frac{k\sqrt{\mu} dE}{(-2E)^{3/2}} = \frac{k\sqrt{\mu}}{(-2E)^{1/2}} \Big|_{E_{\min}}^E = \frac{k\sqrt{\mu}}{(-2E)^{1/2}} - \frac{k\sqrt{\mu}}{(-2E_{\min})^{1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu k^2}{-2E}} - I$$

Introduciamo l'azione $L = T_p + T$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{mk^2}{-2E}}, \text{ cioè in termini "geometrici",}$$

$$L = \sqrt{mk a}$$

T cost. del moto
è il mom. ang.

$$H = -\frac{k}{2a} = -\frac{mk^2}{2L^2} \Rightarrow H(L, G) = -\frac{mk^2}{L^2}$$

dipende solo da L .

Si introduce $S = \int P_p(L, G, p, \theta) dp + P_\theta(G) d\theta$

gli angoli coniugati a L e G sono risp. $\theta = \frac{\partial S}{\partial L}$ (anomalia media)
e $\varphi = \frac{\partial S}{\partial G}$ (indica la direzione del pericentro) -

Si chiama $e = \sqrt{1 + \frac{2J^2 \bar{E}}{mk^2}} \Rightarrow -\frac{2J^2 \bar{E}}{mk^2} = 1 - e^2$

$\Rightarrow J = \sqrt{-\frac{mk^2}{2\bar{E}} (1 - e^2)} = \sqrt{\frac{+mk^2}{+2\frac{k}{2a}} (1 - e^2)}$

$\Rightarrow J = \sqrt{mka} \sqrt{1 - e^2} = p_0 = G \propto 2^a$ azione di De Broglie

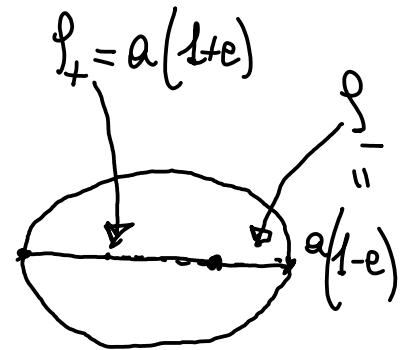
$\Rightarrow G = L \sqrt{1 - e^2}$

Oss. se $e=0$ (moti circolari) $L = G$

$\Rightarrow L$ è uguale al momento angolare di un'orbita circ. di raggio $r=a$

$\frac{G}{L} = \sqrt{1 - e^2}$, $\frac{L - G}{L} = 1 - \sqrt{1 - e^2} \approx \frac{e^2}{2} \Rightarrow$ è un indicatore della differenza tra G e L (che è il max. di G).

Problema di Keplero nel piano
(alcune relazioni note)



$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow r_{\pm} \text{ t.c. } U_{\text{eff}}(r_{\pm}) = E \text{ con } E < 0$$

$$\Rightarrow \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - E = 0 \Rightarrow r^2 + \frac{k}{E} r - \frac{J^2}{2mE} = 0$$

$$\Rightarrow r_{\pm} = -\frac{k}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{J^2}{2mE}} = -\frac{k}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2J^2 E}{mk^2}} \right)$$

//

$$p_{\pm} = a(1 \pm e) \Rightarrow a = -\frac{k}{2E},$$

$$\Rightarrow E = -\frac{k}{2a}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2J^2 E}{mk^2}} < 1 \text{ per } E < 0$$

$$\Rightarrow E_{\min} \text{ t.c. } - \frac{2J^2 E_{\min}}{mk^2} = 1 \Rightarrow E_{\min} = -\frac{mk^2}{2J^2}$$

Si ricordi che

$$T = 2 \int_{p_-}^{p_+} \frac{dp}{\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(p))}} \text{ t.c.}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{m4\pi^2} \text{ (III Kepler)} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}$$

