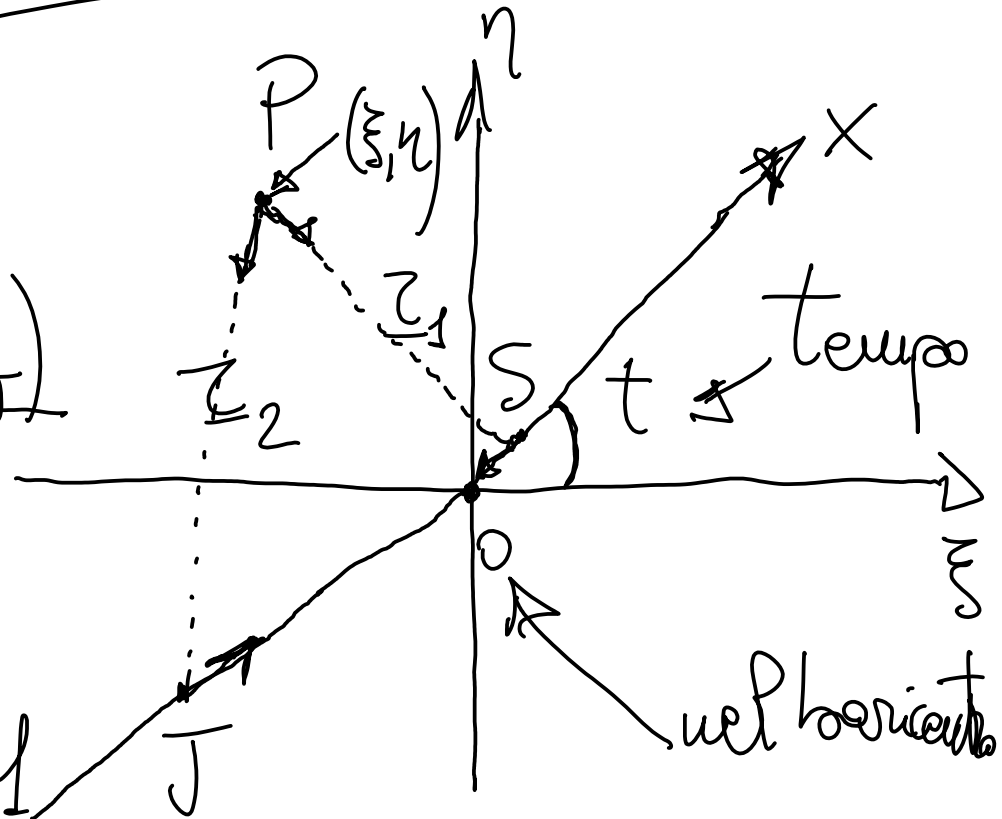


Problema dei tre corpi ristretto circolare piano (PCRTBP)

$\overline{SJ} = 1$, dalla 3^a legge
di Keplero: $\frac{\overline{SJ}^3}{T^2} = \frac{G(m_s + m_J)}{4\pi^2}$

$m_s + m_J = 1$, $m_J = \mu \Rightarrow m_s = 1 - \mu$
 $T = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} = G \cdot \frac{1}{4\pi^2} \Rightarrow G = 1$



la hamiltoniana. è data da

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x y - P_y x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

le cui corrisp. eq. del moto sono

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = P_y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-\mu+1), & \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x + y \\ \dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = P_x - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y, & \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = P_y - x \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni stazionarie t.c.

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow P_x = -y, P_y = x \quad \text{e} \quad \dot{P}_x = \dot{P}_y = 0$$

Osserviamo che l'eq. $\dot{p}_y = 0$ è risolta quando

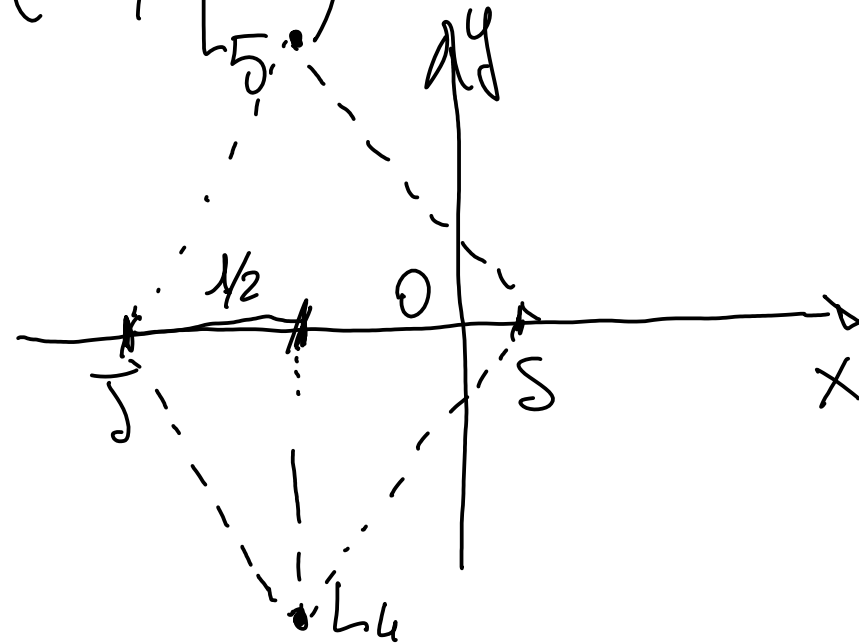
$$z_1 = z_2 = 1, \text{ poiché } \frac{1-\mu}{1} + \frac{\mu}{1} = 1$$

e anche l'eq. $\dot{p}_x = 0$ è risolta quando $z_1 = z_2 = 1$

$$\text{poiché } x - (1-\mu)(x-\mu) - \mu(x-\mu+1) = 0$$

Si ottengono quindi altre
2 soluzioni stazionarie

$$L_4 = \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ e } L_5 = \left(\mu - \frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



Se consideriamo anche i nuovi
le soluzioni stazionarie sono
date da

$$(P_x, P_y, X, Y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

il segno sopra è per L_4 e sotto è per L_5 -

Cerchiamo di studiare le eq. del moto linearizza-
te attorno a L_4/L_5 , a questo scopo introduciamo
le nuove coord. canoniche (P_x, P_y, X, Y) tali che

$$P_x = P_X \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad P_y = P_Y + \mu - \frac{1}{2}, \quad x = X + \mu - \frac{1}{2}, \quad y = Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(tutte le trasformazioni di coordinate sono canoniche, perché è evidente che preservano le $\{ \cdot, \cdot \}$).

Scriviamo allora l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate, cioè

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2} \left[\left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(P_y + \mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}}$$

Inoltre (al fine di poter scrivere le eq. del moto linearizzate nei pressi di L_4/L_5), è conveniente fare le espansioni in serie di Taylor (truncata quasi subito ---) dell'Hamiltoniano

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \underbrace{-\frac{3}{2} + \frac{P_x^2}{2} - \frac{P_y^2}{2}}_{\text{costanti additive}} + (P_x P_y X Y) \mathcal{Q} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix} + o\left(X^2 + Y^2\right),$$

dove la matrice associata alla forma quadratica

è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \pm \gamma \\ 1 & 0 & \pm \gamma & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

suddeite
 Le espansioni in serie di Taylor della
 Ham. $H(P_x, P_y, X, Y)$ si ottengono facilmente
 con Mathematica: si veda il file
 app-quad-L4oL5.nth

$$\Rightarrow \text{ciò è per } \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.03852 \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \omega_2$$

$$\text{dove } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$$

$\Rightarrow$ Vogliamo esprimere la Ham. nella forma

$$H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \text{costanti} + \frac{1}{2} \omega_1 (\vec{p}_1^2 + \vec{q}_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (\vec{p}_2^2 + \vec{q}_2^2) + o(\|(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2)\|^2)$$

Vogliamo determinare una matrice
 Ut. c. $(P_x, P_y, X, Y)^T = U(P_1, P_2, q_1, q_2)^T$ è
 la trasf. che ci permette di scrivere H
 come sopra e con $U^T J U = J$.

Determiniamo U usando Mathematica
 così come spiegato in diag-sympl_4015.pdf
 Osserviamo che se $J Q_{\frac{1}{-1}} i w_1 u_1$

$\Rightarrow TQTQ \underline{u}_1 = -\omega_1^2 \underline{u}_1 \Rightarrow \underline{u}_1$ è autovettore
relativo a $-\omega_1^2 \in \mathbb{R}_-$

Altrettanto vale per $\underline{u}_2$ t.c. $TQ = -\omega_1^2 \underline{u}_2$
 $\Rightarrow$ L'autospazio di $TQTQ$ relativo a $-\omega_1^2$
 è 2-dim. Altrettanto per $-\omega_2^2$

Possiamo introdurre $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ t.c.

$$TQTQ \underline{v}_j = -\omega_j^2 \underline{v}_j \quad \forall j=1,2 \quad \text{e}$$

$$\|\underline{v}_1\|^2 = 1, \quad \underline{v}_1 \cdot T \underline{v}_2 = -1, \quad \underline{v}_2 \cdot T \underline{v}_1 = 1 \quad -$$

Altrettanto si può fare per $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2$ t.c.

$$JQJQ \underline{v}'_j = -\omega_2^2 \underline{v}'_j \quad \forall j=1,2$$

$$\|\underline{v}'_j\| = 1, \quad \underline{v}'_2 \cdot J\underline{v}'_1 = 1$$

Oss : $\underline{v}_i \cdot J\underline{v}'_j = 0 \quad \forall i, j=1,2$

Dim. $-\omega_1^2 \underline{v}_i \cdot (J\underline{v}'_j) = (JQJQ \underline{v}_i) \cdot (J\underline{v}'_j) =$

$$= (QJQ \underline{v}_i) \cdot (\underbrace{J^T J}_{\underline{I}} \underline{v}'_j) = (QJQ \underline{v}_i) \cdot \underline{v}'_j$$

$-J = J^T = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{I} \\ \underline{I} & 0 \end{pmatrix}$

$$= (JQ \underline{v}_i) \cdot (Q \underline{v}'_j) = (Q \underline{v}_i) \cdot (JQ \underline{v}'_j) = \underline{v}_i \cdot (QJQ \underline{v}'_j)$$

$J \cdot J^T = \underline{I}$

$$= +(\underline{v}_i) \cdot (J^2 QJQ \underline{v}'_j) = +(\underline{v}_i) \cdot (J(JQJQ \underline{v}'_j)) = -\omega_2^2 \underline{v}_i \cdot (J\underline{v}'_j)$$

$J^2 = J \cdot J = -\underline{I}$

$$\Rightarrow \underbrace{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}_{\neq 0} (\underline{v}_i \cdot T \underline{v}_j') = 0 \Rightarrow \underline{v}_i \cdot T \underline{v}_j' = 0 \quad \forall i, j=1,2$$

C.V.D.

Oss.: $\underline{v}_i \cdot Q \underline{v}_j' = 0 \quad \forall i, j=1,2$ spieg. pl. zero

$$V := \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_1' & \underline{v}_2 & \underline{v}_2' \end{pmatrix} \Rightarrow V^T Q V = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & 0 & \tilde{c}_{13} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{22} & 0 & \tilde{c}_{24} \\ \tilde{c}_{31} & 0 & \tilde{c}_{33} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{42} & 0 & \tilde{c}_{44} \end{pmatrix}$$

Ci proponiamo di determinare una matrice Z c.s. - $Z^T (V^T Q V) Z = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ 0 & & & d_4 \end{pmatrix}$

(Simplicia)

Z della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è symplectic

A questo punto, basta definire una matrice diagonale D (detta, assai volgarmente, di dilatazione - compressione) che porta Q nella forma desiderata, cioè

$$(D^T Z^T V^T) Q (V Z D) = \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & w_1 & \\ 0 & & & w_2 \end{pmatrix}, \text{ vedi le note esplicative } \text{diag-sympl-14ol5.pdf}$$