Per il resto, soluzioni interessanti dell'eq. di Ham.-Jacobi derivano dal th. di Liouville.

Def.: Si dice che $\Phi_1(p,q), \dots, \Phi_n(p,q)$ formano un sistema <u>completo</u> in involuzione, quando

$$\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0 \quad \text{e} \quad \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0 \quad \forall\, i,j=1,\dots,n$$

quest'ultima relazione è equivalente a richiedere che $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,2n}} = n$ con $\underline{z} = (\underline{p}, \underline{q})$

Teorema: Sia H t.c. ammette n integrali primi $\Phi_1(\underline{p},\underline{q}), \dots, \Phi_n(\underline{p},\underline{q})$ che formano un sistema completo in involuzione, allora le eq. di Ham. $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ $\forall j = 1, \dots, n$ sono integrabili "per quadrature".

Lemma: Se $\{\Phi_j(p,q)\}_{j=1,\dots,n}$ è un sistema completo in involuzione, allora $\exists$ una trasf. canonica che possiamo esprimere tramite $S=S(\Phi,q)$, cioè $\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \Phi_j}$, $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ $\forall j=1,\dots,n$.

Tale generatrice è $S(\Phi,q) = \sum_{j=1}^{n} \int p_j(\Phi,q)\, dq_j$

Soluzione delle eq. di Hamilton seguendo l'approccio del th. di Liouville:

(1) Eventuali scambi tra coordinate e momenti in modo

t.c. $\det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_j}\right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$ (dove $\Phi_1(p,q), \dots, \Phi_n(p,q)$ sono integrali primi in involuzione)

(2) Si calcola la generatrice

$$S(\underline{\Phi}, \underline{q}) = \int \sum_{j=1}^{n} p_j(\underline{\Phi}, \underline{q})\, dq_j$$

(3) Si determinano

$$\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial \Phi_j} \quad \forall\ j = 1, \dots, n$$

e si inverte la rel. in modo t.c. $\underline{q} = \underline{q}(\underline{\Phi}, \underline{\alpha})$ e $\underline{p} = \underline{p}(\underline{\Phi}, \underline{q}(\underline{\Phi}, \underline{\alpha}))$

(4) Si esprime l'Ham. in funzione di $(\underline{\Phi}, \underline{\alpha})$ cioè $H = H(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$

(5) Si risolve l'eq. di Ham. in $(\underline{\Phi}, \underline{\alpha})$, cioè

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{\Phi}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0 \Rightarrow \Phi_j(t) = \Phi_j(0) \\ \dot{\alpha}_j = \dfrac{\partial H}{\partial \Phi_j}\left(\Phi_1(0), \dots, \Phi_n(0)\right) = c_j \text{ costante!} \Rightarrow \alpha_j(t) = \alpha_j(0) + c_j(t - t_0) \end{cases}$$

(6) La soluzione delle eq. di Ham. in coord. $(\underline{p}, \underline{q})$ si ottiene da $(\underline{p}(t), \underline{q}(t)) = \mathcal{C}(\underline{\Phi}(t), \underline{\alpha}(t))$ dove $(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{\Phi}, \underline{\alpha})$

Esempio (applicazione a problema mecc. con $n=1$):

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \iff m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$$

$$p = m\dot{x} \implies H(p,x) = \frac{1}{2m}p^2 + U(x) \implies H(p,x) = E$$

è cost. del moto! Dobbiamo invertire $\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$

in modo da ottenere $p = p(E,x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$

2

$$\implies S(E,x) = \int p\,dx = \int \sqrt{2m(E-U(x))}\,dx$$

(3) $$\alpha = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}\sqrt{2m(E-U(x))}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

(4) $$H(E,\alpha) = E$$

(5) $$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \Rightarrow \alpha(t) = t - t_0$$

(6) $$p(t) = \sqrt{2m\left(E - U(x(t))\right)}$$ dove $x(t)$ t.c. –

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\xi))}}$$, cioè la sol. per quadrature che si ottiene da $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$ –

Oss.: Si ponga $\tilde{S}(E, x, t) = S(E, x) - E \cdot t$

$$= \left[\int dx \sqrt{2m(E - U(x))} \right] - E \cdot t$$

allora $\tilde{S}$ è soluzione dell'eq. di Ham.-Jacobi

cioè $H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(x) - E = 0$

Oss.: Se abbiamo n simmetrie per il nostro sistema meccanico e le corrisp. cost. del moto (si ricordi il th. di Noether $\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$ è un integrale primo) e $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0 \;\forall i, j = 1, \dots, n$ allora sappiamo risolvere le eq. di H.

Esempio (sistema di oscillatori armonici):

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}\left(p_j^2 + q_j^2\right) \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_j = -\omega_j q_j & \forall j = 1,\dots,n \\ \dot{q}_j = \omega_j p_j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si conserva $E_j = \frac{\omega_j}{2}\left(p_j^2 + q_j^2\right)$

Si osservi che $m\ddot{x} = -kx$ può essere sempre posto nella forma $H = \frac{\omega}{2}\left(p^2 + q^2\right)$. Infatti:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow p_x = m\dot{x} \Rightarrow H(p_x, x) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_x^2}{m} + kx^2\right)$$

Si ponga $p_x = \alpha p$, $x = \frac{q}{\alpha}$, con $\alpha = (mk)^{1/4}$ allora

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{m}\sqrt{mk}\,p^2 + \frac{k}{\sqrt{mk}}q^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(p^2 + q^2\right) = \frac{\omega}{2}\left(p^2+q^2\right), \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

— ∘ —

Utilizziamo $E_j = \frac{\omega_j}{2}(p_j^2 + q_j^2)$ $\forall j$ come cost. del moto $\Rightarrow p_j(E_j, q_j) = \sqrt{\frac{2E_j}{\omega_j} - q_j^2}$

(2) $S(\underline{E}, \underline{q}) = \int \sum_{j=1}^{n} p_j(E_j, q_j)\, dq_j = \sum_{j=1}^{n} \int dq_j \sqrt{\frac{2E_j}{\omega_j} - q_j^2}$

(3) $\alpha_j = \frac{\partial S}{\partial E_j} = \int \frac{dq_j}{\omega_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{\omega_j} - q_j^2}}$

(4) $H = H(\underline{E}) = \sum_{j=1}^{n} E_j$

5) $\dot{\mathcal{E}}_j = \dfrac{\partial H}{\partial \alpha_j} = 0 \quad , \quad \dot{\alpha}_j = \dfrac{\partial H}{\partial \mathcal{E}_j} = 1 \quad , \quad \alpha_j(t) = t - t_0$

6) $p_j(t) = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}_j}{\omega_j} - \left(q_j(t)\right)^2}$ dove $q_j(t)$ è c.

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega_j}\int \frac{dq_j}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_j}{\omega_j} - q_j^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_j\omega_j}}\int \frac{dq_j}{\sqrt{1 - \frac{\omega_j q_j^2}{2\mathcal{E}_j}}} = \frac{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_j}{\omega_j}}}{\sqrt{2\mathcal{E}_j\omega_j}}\int \frac{\sqrt{\frac{\omega_j}{2\mathcal{E}_j}}\,dq_j}{\sqrt{1 - \frac{\omega_j q_j^2}{2\mathcal{E}_j}}}$$

$$= \frac{1}{\omega_j} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\omega_j}{2\mathcal{E}_j}}\, q_j\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\omega_j(t - t_0)\right) = \sqrt{\frac{\omega_j}{2\mathcal{E}_j}}\, q_j \Rightarrow q_j(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_j}{\omega_j}}\, \sin\left(\omega_j(t - t_0)\right)$$

$$\Rightarrow P_j = \sqrt{\frac{2E_j}{\omega_j}} \cos\left(\omega_j \left(t - t_0\right)\right)$$

Teorema (di Arnold-Jost): Siano $\Phi_1(p,q), \ldots, \Phi_n(p,q)$ un sistema completo di integrali primi in involuzione per la Ham. $H = H(p,q)$. Sia $M_{\underline{c}}$ una componente n-dim. connessa e ~~compatta~~ compatta dell'insieme $\{(p,q) : \underline{\Phi}(p,q) = \underline{c}\}$, allora $\exists$ un intorno U di M_c (nello spazio delle fasi) t.c.

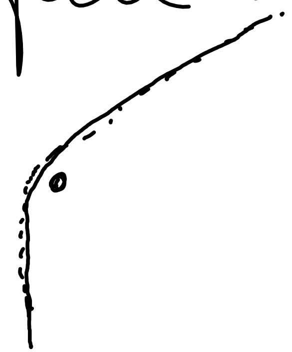
$\exists$ una trasformazione canonica $\underline{\Psi} : G \times \mathbb{T}^n \to U$ dove $G \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

t.c. $(\underline{P}, \underline{q}) = \underline{\Psi}(\underline{I}, \underline{\varphi})$ (cioè sono n angoli!) e $H(\underline{\Psi}(\underline{I}, \underline{\varphi})) = H(\underline{I})$

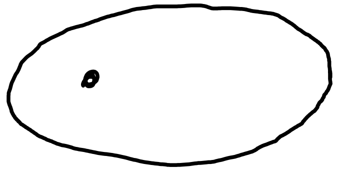
$$\Rightarrow \quad I_j(t) = I_j(0) \quad \text{e} \quad \varphi_j(t) = \omega_j (t - t_0) \quad \text{dove } \omega_j = \dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j}(\underline{I}(0))$$

Oss. che ad esempio nel problema di Keplero <u>NON</u> siamo su una superficie compatta quando

$$\underbrace{E = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} - \frac{k}{\|\underline{x}\|}} > 0$$

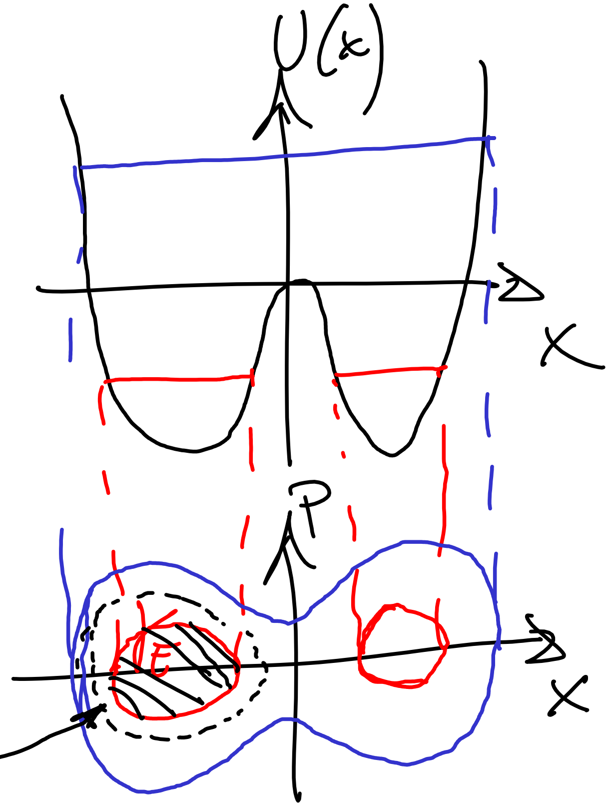


Il moto si svolge su una superficie compatta quando $E<0$



Esempio: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$

in fig. $U(x) = -\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4$ con $a, b > 0$



Cerchiamo di introdurre coord. di angolo (e azione)

Introduciamo $I = \oint_{\gamma_E} p(E, x)\, dx$ è un'azione, cioè $[I] = [p][x]$

$\Rightarrow [I] = [E] \cdot [t]$, poiché $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \frac{[p] \cdot [q]}{[t]} = [E]$

$\Rightarrow [p] \cdot [q] = [E] \cdot [t] = [\text{azione}]!$

$\Rightarrow$ se $[q]$ è un angolo $\Rightarrow [p] = [\text{azione}]$.

$\Rightarrow S = \int p(I, x)\, dx$, l'angolo associato

sarà $\varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$