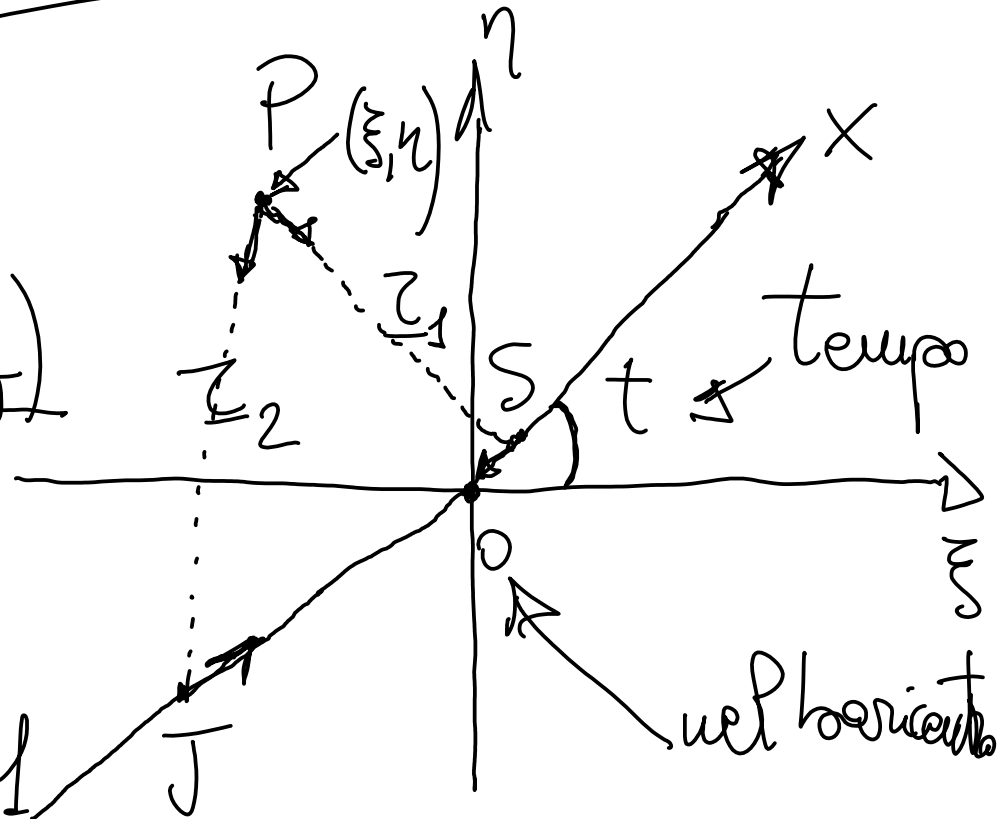


Problema dei tre corpi ristretto circolare piano (PCRTBP)

$\overline{SJ} = 1$, dalla 3^a legge
di Keplero: $\frac{\overline{SJ}^3}{T^2} = \frac{G(m_s + m_J)}{4\pi^2}$

$m_s + m_J = 1$, $m_J = \mu \Rightarrow m_s = 1 - \mu$
 $T = 2\pi \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} = G \cdot \frac{1}{4\pi^2} \Rightarrow G = 1$



Si osservi che la massa m_P non influenza il moto: $m_P \ddot{\vec{x}}_P = - \frac{G m_S m_P}{\overline{PS}^3} \vec{SP} - \frac{G m_J m_P}{\overline{PJ}^3} \vec{JP}$

In termini lagrangiani, il sistema è descritto da $L = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{G m_S}{\overline{SP}(\xi, \eta, t)} + \frac{G m_J}{\overline{JP}(\xi, \eta, t)}$

$$\Rightarrow P_{\xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \dot{\xi}, \quad P_{\eta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \dot{\eta}$$

Ham. del sistema (nel rif. inerziale con origine nel baricentro):
 $H = \frac{1}{2} (P_{\xi}^2 + P_{\eta}^2) - \frac{1-\mu}{z_1} - \frac{\mu}{z_2}$ dove $z_1 = \overline{SP}(\xi, \eta, t)$, $z_2 = \overline{JP}(\xi, \eta, t)$

Osserviamo che la velocità angolare
 $\frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow \underline{e}_x, \underline{e}_y = t$

Passiamo al sist. di rif. (sinodico) rotante
con i primari, descritto dalle coord.:

$$\begin{cases} x = \xi \cos t + \eta \sin t \\ y = -\xi \sin t + \eta \cos t \end{cases}$$

Per estendere la trasf.
ai momenti usiamo

$$S = P_x \cdot x(\xi, \eta, t) + P_y \cdot y(\xi, \eta, t)$$

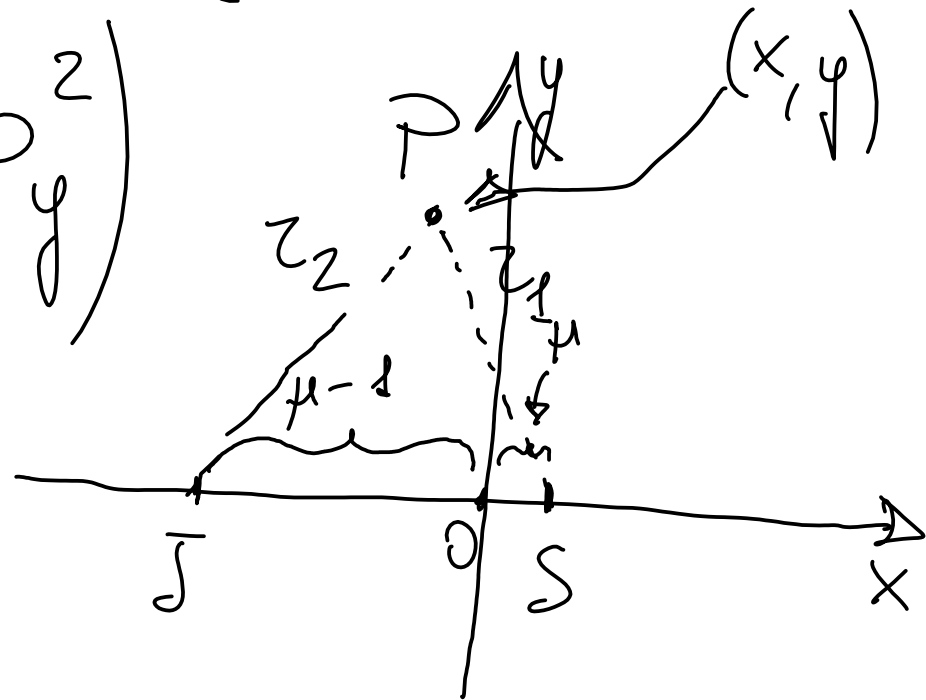
$$\Rightarrow S(P_x, P_y, \xi, \eta) = P_x(\xi \cos t + \eta \sin t) + P_y(-\xi \sin t + \eta \cos t)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\partial S}{\partial p_x} = \xi \cos t + \eta \sin t & p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = p_x \cos t - p_y \sin t \\ y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = -\xi \sin t + \eta \cos t & p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = p_x \sin t + p_y \cos t \end{cases}$$

sono 2 rotazioni di angoli
rispettivamente t e $-t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)$$

Osserviamo che nel
nuovo rif. Se T sono fissi



$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \quad z_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}$$

la media Haller. Sarà $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1-\mu}{z_1} - \frac{\mu}{z_2} + \frac{\partial S}{\partial t}(p_x, p_y, x, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(p_x \left(\sum \cos t + y \sin t \right) + p_y \left(-\sum \sin t + y \cos t \right) \right) = \\ &= \left(-p_x \sin t - p_y \cos t \right) (x \cos t - y \sin t) + \left(p_x \cos t - p_y \sin t \right) (x \sin t + y \cos t) \\ &= \sin t \cdot \cos t \left(-\cancel{p_x \cdot x} + \cancel{p_y \cdot y} + \cancel{p_x \cdot x} - \cancel{p_y \cdot y} \right) + p_x y (\sin^2 t + \cos^2 t) - p_y x (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= p_x y - p_y x \end{aligned}$$

la hamiltoniana. è data da

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + P_x y - P_y x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}}$$

le cui corrisp. eq. del moto sono

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = P_y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-\mu+1), & \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = P_x + y \\ \dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = P_x - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y, & \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = P_y - x \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni stazionarie t.c.

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow P_x = -y, P_y = x \quad \text{e} \quad \dot{P}_x = \dot{P}_y = 0$$

Ne segue che

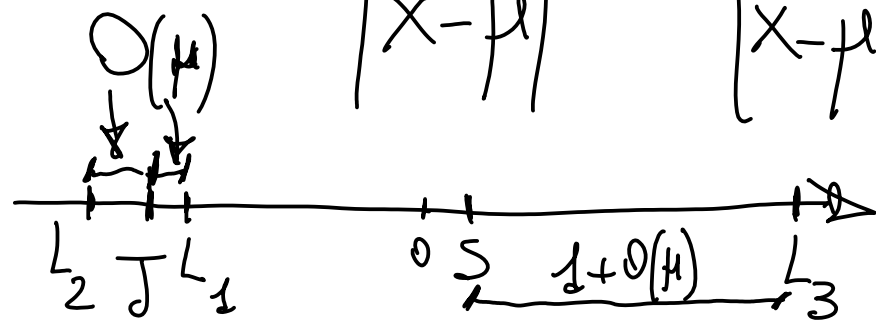
$$\left\{ \begin{aligned} x - \frac{1-\mu}{z_1^3} (x-\mu) - \frac{\mu}{z_2^3} (x-\mu+1) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y \left(1 - \frac{1-\mu}{z_1^3} - \frac{\mu}{z_2^3} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Downarrow \quad \frac{1-\mu}{z_1^3} + \frac{\mu}{z_2^3} = 1 \quad (\text{vedi pag. precedente})$$

$y=0 \Rightarrow$ la 1^a eq. sopra diventa $0 = x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{|x-\mu|^3} - \frac{\mu(x-\mu+1)}{|x-\mu+1|^3}$

che ammette tre soluzioni
 L_1, L_2, L_3 (collineari a ScT)



Osserviamo che l'eq. $\dot{p}_y = 0$ è risolta quando

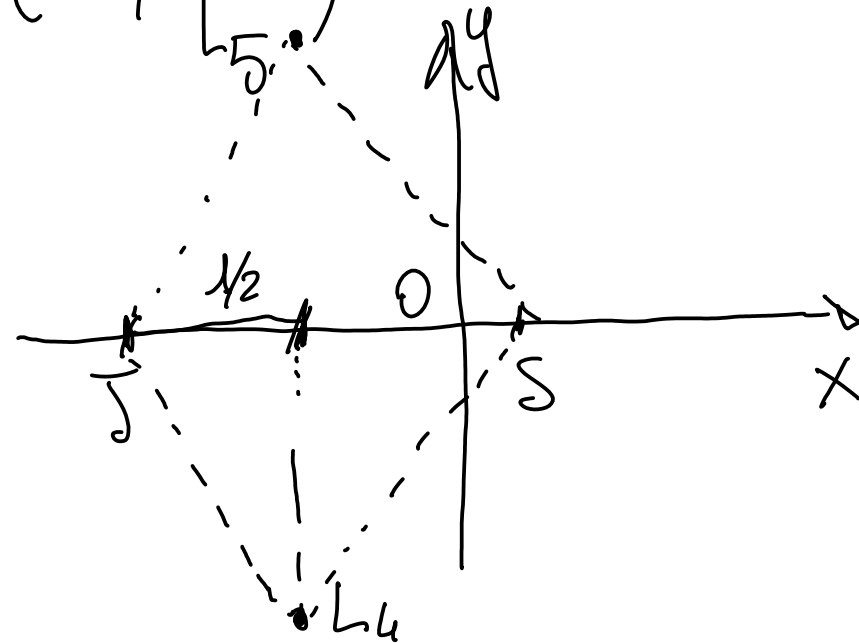
$$z_1 = z_2 = 1, \text{ poiché } \frac{1-\mu}{1} + \frac{\mu}{1} = 1$$

e anche l'eq. $\dot{p}_x = 0$ è risolta quando $z_1 = z_2 = 1$

$$\text{poiché } x - (1-\mu)(x-\mu) - \mu(x-\mu+1) = 0$$

Si ottengono quindi altre
2 soluzioni stazionarie

$$L_4 = \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ e } L_5 = \left(\mu - \frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



Se consideriamo anche i nuovi
le soluzioni stazionarie sono
date da

$$(P_x, P_y, X, Y) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \mu \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

il segno sopra è per L_4 e sotto è per L_5 -

Cerchiamo di studiare le eq. del moto linearizza-
te attorno a L_4/L_5 , a questo scopo introduciamo
le nuove coord. canoniche (P_x, P_y, X, Y) tali che

$$P_x = P_X \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad P_y = P_Y + \mu - \frac{1}{2}, \quad x = X + \mu - \frac{1}{2}, \quad y = Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(tutte le trasformazioni di coordinate sono canoniche, perché è evidente che preservano le $\{ \cdot, \cdot \}$).

Scriviamo allora l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate, cioè

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \frac{1}{2} \left[\left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(P_y + \mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \left(P_x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}}$$

Inoltre (al fine di poter scrivere le eq. del moto linearizzate nei pressi di L_4/L_5), è conveniente fare le espansioni in serie di Taylor (truncata quasi subito ---) dell'Hamiltoniano

$$H(P_x, P_y, X, Y) = \underbrace{-\frac{3}{2} + \frac{H}{2} - \frac{H^2}{2}}_{\text{costanti additive}} + (P_x, P_y, X, Y) \mathcal{Q} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ X \\ Y \end{pmatrix} + o\left(X^2 + Y^2\right),$$

dove la matrice associata alla forma quadratica

è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \pm \gamma \\ 1 & 0 & \pm \gamma & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \text{dove } \gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

suddeite
 Le espansioni in serie di Taylor della
 Ham. $H(P_x, P_y, X, Y)$ si ottengono facilmente
 con Mathematica: si veda il file
 app-quad-L4oL5.nth

Il polinomio caratteristico associato a JQ è dato da $P(\lambda) = \det(JQ - \lambda I) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$.
 Studiamo gli autovalori associati alle eq. del moto linearizzate nei pressi di L_4 o L_5 sono

t.c. $P(\lambda) = \det(JQ - \lambda I) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}$$

$(\lambda^2)_{1,2}$ sono 2 numeri reali negativi se $27\mu(1-\mu) < 1$

$$\Rightarrow \text{ciò è per } \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.03852 \quad \text{---}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \omega_2$$

$$\text{dove } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}$$

$\Rightarrow$ Vogliamo esprimere la Ham. nella forma

$$H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \text{costanti} + \frac{1}{2} \omega_1 (\vec{p}_1^2 + \vec{q}_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (\vec{p}_2^2 + \vec{q}_2^2) + o(\|(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2)\|^2)$$

Vogliamo determinare una matrice
 Ut. c. $(P_x, P_y, X, Y)^T = U(P_1, P_2, q_1, q_2)^T$ è
 la trasf. che ci permette di scrivere H
 come sopra e con $U^T J U = J$.

Determiniamo U usando Mathematica
 così come spiegato in diag-sympl_4015.pdf
 Osserviamo che se $J Q_{\frac{1}{-1}} i w_1 u_{-1}$

$$\Rightarrow TQTQ \underline{u}_1 = -\omega_1^2 \underline{u}_1 \Rightarrow \underline{u}_1 \text{ è autovettore relativo } -\omega_1^2 \in \mathbb{R}_-.$$

Altrettanto vale per $\underline{u}_2$ t.c. $TQ = -\omega_1^2 \underline{u}_2$ -

$\Rightarrow$ L'autospazio di $TQTQ$ relativo a $-\omega_1^2$

è 2-dim. Altrettanto per $-\omega_2^2$ -

Possiamo introdurre $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ t.c. -

$$TQTQ \underline{v}_j = -\omega_j^2 \underline{v}_j \quad \forall j=1,2 \quad \text{e}$$

$$\|\underline{v}_1\|^2 = 1, \quad \underline{v}_1 \cdot T \underline{v}_2 = -1, \quad \underline{v}_2 \cdot T \underline{v}_1 = 1 \quad -$$

Altrettanto si può fare per $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2$ t.c.

$$JQ JQ \underline{v}'_j = -\omega_2 \underline{v}'_j \quad \forall j=1,2$$

$$\|\underline{v}'_j\| = 1, \quad \underline{v}'_2 \circ J \underline{v}'_1 = 1$$

Oss : $\underline{v}'_i \circ J \underline{v}'_j = 0 \quad \forall i, j=1,2$