

Sia $f(\underline{x})$ con $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ - dimensionale viene
 vista come una 0-forma -

Allora $df = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ è una 1-forma diff.

$$e \, d^s f = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s \\ i_1 < \dots < i_s}} \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_s}$$

è la $s+1$ -forma diff.

in particolare $d^2 f = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$

Teorema: Una forma differenziale ω è esatta sse è chiusa

$\nearrow \int \text{t.c. } dS = \omega$

$\nwarrow d\omega = 0$

$\omega^2 = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$

che afferma che una trasf. è canonica sse preserva la 2-forma fondamentale

Dim. (della proposizione): Partiamo da

$$\sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i,l=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_l}{\partial q_j} dp_l \wedge dq_j + \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_l}{\partial p_i} dp_l \wedge dp_i + \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial q_l}{\partial q_j} dp_l \wedge dq_j + \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial q_l}{\partial p_j} dp_l \wedge dp_i \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, e \leq n} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial Q_i \partial Q_e} \frac{\partial Q_i}{\partial Q_e} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial Q_i \partial Q_e} \frac{\partial P_i}{\partial Q_e} \right) Q_i \wedge dQ_e + [P_i, P_e] dP_i \wedge dP_e$$

$$[Q_i, Q_e] + \sum_{i, e=1}^n [P_i, Q_e] dP_i \wedge dQ_e$$

$$= \sum_{j=1}^n dP_j \wedge dQ_j \quad \text{s.s.e}$$

$$[Q_i, Q_e] = [P_i, P_e] = 0 \quad \text{e} \quad [Q_i, P_e] = \delta_{i,e} \quad \forall i, e=1, \dots, n.$$

C.V.D.

Proposizione: una Transf. $(P, Q) = \mathcal{L}(\underline{P}, \underline{Q})$

è canonica se preserva $\oint_{\mathcal{C}(V)} \sum_{j=1}^n P_j dq_j = \oint_{\mathcal{C}(V)} \sum_{j=1}^n P_j dQ_j$

(dove si intende che V è un percorso chiuso parametrizzabile rispetto a $\underline{Q}$)

Dim.: Se $\mathcal{L}$ è canonica, allora

$$\sum_{j=1}^n (dP_j \wedge dq_j - dP_j \wedge dQ_j) = 0 \Rightarrow \text{è una 2-forma chiusa} \Rightarrow \text{è esatta}$$

cioè 1-forma diff. $\sum_{j=1}^n P_j dq_j - T_j dQ_j$
 che lo genera $\Rightarrow \oint \left(\sum_{j=1}^n P_j dq_j - T_j dQ_j \right) = 0$
 $\Rightarrow \oint_{\gamma(r)} \sum_{j=1}^n P_j dq_j = \oint_{\gamma} \sum_{j=1}^n T_j dQ_j$

Se invece $\oint \sum_{j=1}^n (P_j dq_j - T_j dQ_j) = 0$ allora
 è 1-forma esatta e quindi chiusa $\Rightarrow \sum_{j=1}^n dP_j \wedge dq_j = 0$
 $= \sum_{j=1}^n dT_j \wedge dQ_j$ C.V.D.

Proposizione (della generazione in coord. unite):

Sia $S = S(\underline{P}, \underline{q})$ t.c. $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$

è canonica

allora la trasf. $(\underline{P}, \underline{q}) = \mathcal{P}(\underline{P}, \underline{Q})$ definita da

$$\forall j=1,\dots,n \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(\underline{P}, \underline{q}) \quad \text{e} \quad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(\underline{P}, \underline{q})$$

può essere espressa nella forma $q_j = q_j(\underline{P}, \underline{Q})$
 $P_j = P_j(\underline{P}, \underline{Q})$

Dice: Consideriamo la funzione

$$\tilde{S} = S(P, q) - \sum_{j=1}^n P_j Q_j$$

$$\Rightarrow d\tilde{S} = \sum_{j=1}^n \left(\cancel{\frac{\partial S}{\partial P_j} dP_j} + \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j - \cancel{Q_j dP_j} - \cancel{P_j dQ_j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n P_j dq_j - P_j dQ_j \quad \text{è una 1-forma}$$

differenziale esatto $\Rightarrow$ è chiusa $\Rightarrow \int_{C(r)} \sum_{j=1}^n P_j dq_j = \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n P_j dq_j$
C.V.D.

Esempio (trasf. canoniche di punto esteso):

Sia $g = f(\underline{Q})$ una trasf. invertibile sulle
coord., ($\Rightarrow \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$)

$\Rightarrow \underline{Q} = g(\underline{q})$. Definiamo la pen.

$$S = \sum_{j=1}^n P_j Q_j(\underline{q}) = \sum_{j=1}^n P_j q_j(\underline{q}), \text{ allora}$$



La trasf. def. da
 è canonica -

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(P, q) \quad \text{e} \quad P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(P, q)$$

$$Q_j = q_j(q)$$

$$P_i = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial q_j(q)}{\partial q_i}$$

Esempio: Si consideri $P_i = P_i$, $q_i = Q_i \quad \forall i=1, \dots, n$
 con $i \neq j$, $P_i = Q_j$, $q_i = -P_j$ è una trasf. canonica
 $\{P_i, P_j\}_{P, Q} = \{q_i, q_j\}_{P, Q} = 0 \quad \forall i, j$ e $\{q_i, P_j\}_{P, Q} = \delta_{ij}$ se $i, j=1, \dots, n$ e $(i, P) \neq (j, Q)$

$$\{q_i, p_i\}_{P,Q} = -\{p_i, q_i\}_{P,Q} = \{q_i, p_i\}_{P,Q} = 1 -$$

Esempio: Sia $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ t.c. $\mathcal{I} \cup \mathcal{K} = \{1, \dots, n\}$
 e $\mathcal{I} \cap \mathcal{K} = \emptyset$, allora $\forall k \in \mathcal{K}$
 $p_i = P_i, q_i = Q_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$ e $p_k = Q_k, q_k = -P_k$
 è canonica -

Proposizione: Sia $S(\underline{P}, \underline{q}, t)$ una fun-
 z. c. c. $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$, allora

la trasf. $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(\underline{P}, \underline{q}, t)$ e $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\underline{P}, \underline{q}, t)$

def. un cambio di coord. $(\underline{P}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}, t)$

che è canonico e la nuova ham-
 miltoniana

$$K(\underline{P}, \underline{Q}, t) = H(\underline{P}, \underline{q}, t) \Big|_{(\underline{P}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}, t)} + \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\underline{q} = \underline{q}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}$$

Dato: si consideri $\tilde{H} = H(P, q, q_0) + P_0$
 e $\tilde{S}(P, q, P_0, q_0) = S(P, q, q_0) + P_0 q_0$ allora
 $Q_0 = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_0} = q_0$ e $\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial P_i \partial q_j} \right)_{i,j=0,\dots,n} = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_i \partial q_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$

$\Rightarrow$ la transf. def. dalla per. "estesa" $\tilde{S}$ è
 canonica e è descritta ~~da~~ $q_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial P_i}$ e da
 $(\square) P_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \forall i=1,\dots,n \quad Q_0 = q_0 \text{ e } P_0 = P_0 + \frac{\partial S}{\partial q_0}$

Osserviamo che $(\underline{P}, \underline{q}) = \mathcal{L}(\underline{P}, \underline{Q}, t)$
 (definito da $(\star)$ e $(\square)$) è canonica
 e la nuova ham. sarà data dalla
 "restrizione" di $(\underline{P}, \underline{Q}, P_0, Q_0) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q}, t)$ della
 nuova hamiltoniana

$$\tilde{K}(\underline{P}, \underline{Q}, P_0, Q_0) = H(\underline{P}, \underline{q}, q_0) \Big|_{(\underline{P}, \underline{q}) = \mathcal{L}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}^{+P_0 + \frac{\partial S}{\partial q_0} \Big|_{q=q(\underline{P}, \underline{Q})}}$$

$$\Rightarrow K(\underline{P}, \underline{Q}, t) = H(\underline{P}, \underline{q}, t) \Big|_{(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}, t)} + \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\underline{q} = \underline{q}(\underline{P}, \underline{Q}, t)}$$

————— • —————

Comi alla geometria симплекtica.

Def.: una matrice U si dice симплекtica

se $U^T J U = J$, dove $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

$\swarrow$
 $n \times n$
 $\nearrow$
 dim

Proposizione: le matrici simpletiche
formano un gruppo.

Dim. Se U e V sono simpletiche allora
 UV lo è: $U^T J U = J = V^T J V \Rightarrow$

$$\Rightarrow (UV)^T J UV = V^T (U^T J U) V = \\ = V^T J V = J.$$

$\mathbb{I}_{2n}$ è l'elem. neutro $\mathbb{I}^T J \mathbb{I} = \mathbb{I} J \mathbb{I} = J$

Se U è симплектика pure U^{-1} è симплектика

$$\begin{aligned} J &= I^T J I = (U \cdot U^{-1})^T J U U^{-1} = (U^{-1})^T (U^T J U) U^{-1} = \\ &= (U^{-1})^T J U^{-1} = J \end{aligned}$$

Se U è simplet. $\Rightarrow$ lo è anche U^T

$$\begin{aligned} J &= U^T J U \Rightarrow U^T J (U \cdot U^{-1}) = J U^{-1} \\ \Rightarrow U^T J \cdot J^{-1} &= J \cdot U^{-1} J^{-1} \Rightarrow U^T = J \cdot U^{-1} \cdot J^{-1} \\ \Rightarrow U J U^T &= U (J \cdot J) U^{-1} \cdot J^{-1} = -(U \cdot U^{-1}) \cdot J^{-1} = -J^{-1} = J, \end{aligned}$$

Si come $J^2 = -I \Rightarrow J \cdot (J \cdot J^{-1}) = -J \Rightarrow J^{-1} = -J$.

Def.: diciamo che $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ sono
 simpletticamente-ortogonali se
 $\underline{u} \cdot J\underline{v} = 0$ (si scrive $\underline{u} \perp \underline{v} = 0$).

Oss. $\underline{u} \cdot J\underline{u} = \sum_{j=1}^n -u_j u_{j+n} + u_{j+n} u_j = 0$.

Def.: Diciamo che 2 sottospazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono
 simpl. ortogonali se $\forall \underline{u} \in \mathcal{U}$ e $\underline{v} \in \mathcal{V}$ si ha che $\underline{u} \cdot J\underline{v} = 0$.

Si dice che un sottospazio U è lagrangiano se $U = U^\perp$ $\rightarrow U^\perp = \{ \underline{w} \text{ t.c. } \underline{u} \cdot \underline{J} \underline{w} = 0 \forall \underline{u} \in U \}$

Siano $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ un insieme di coord. can. nello sp. delle fasi, poiché

$\underline{d}_i = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-i} \right)$ e $\underline{e}_j = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n+j-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j} \right)$

i-esima posizione *n+j-esima pos.*

$$\Rightarrow \underline{d}_i \cdot \underline{J} \underline{d}_j = \underline{e}_i \cdot \underline{J} \underline{e}_j = 0, \quad \underline{e}_i \cdot \underline{J} \underline{d}_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow (d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_n)$ base canonica
della form. симплектика.

$$\text{Siano } \underline{u} = \sum_{j=1}^n a_j d_j + a_{j+n} e_j \quad \underline{v} = \sum_{j=1}^n b_j d_j + b_{j+n} e_j$$

$$\Rightarrow \underline{u} \circ (\underline{v}) = \sum_{j=1}^n (-a_j b_{j+n} + a_{j+n} b_j)$$

$$\text{Siano } \underline{d} = U \underline{a} \quad \text{dove } \underline{a} = (a_1, \dots, a_{2n})^T \in U_{\text{matr}}^{2n \times 2n}$$

$$\underline{b} = U \underline{b} \quad \text{dove } \underline{b} = (b_1, \dots, b_{2n})$$

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{j+n} b_j - a_j b_{j+n} \right) = \sum_{j=1}^n \left(a_{j+n} b_j - a_j b_{j+n} \right)$$

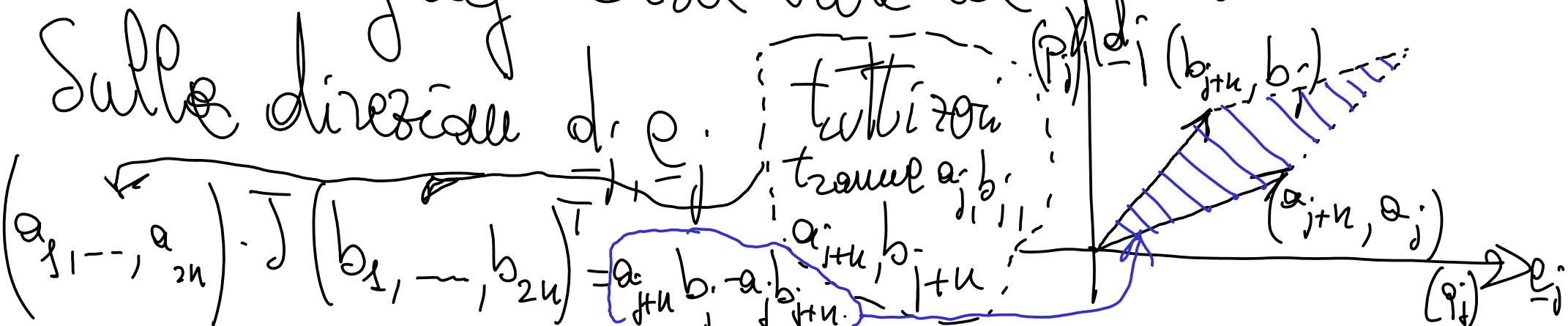
||

||

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \cdot \left(U^T J U \right) \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}^T$$

→ L'uguaglianza vale se
Sulle direzioni d, c

$$U^T J U = J$$



le matrici simplettiche godono della
proprietà di preservare ~~conservare~~ delle
aree sulla j -esima coppia di coordinate-unità

cioè
$$\det \begin{pmatrix} a_{j+n} & b_{j+n} \\ a_j & b_j \end{pmatrix} = a_{j+n} b_j - a_j b_{j+n} .$$