Parentesi di Poisson –

variabile dinamica $f : F \to \mathbb{R}$

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j + \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} =: \{f, H\}$$

dove $\forall f, g : F \to \mathbb{R}$, $\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$

$(F, \{\cdot,\cdot\})$ è un'algebra di Lie,

cioè la parentesi di Poisson $\{\cdot,\cdot\}$

1. è bilineare $\{\alpha f + \beta g, h\} =$

$\forall\ f, g, h \in F,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\},$

2. è anticommutativa $\{f, g\} = -\{g, f\}$

3. vale l'id. di Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

$$\{f,\{g,h\}\} = \left\{f, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right\}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\right]$$

Per la verifica si vedano i file (di macro x Mathematica) jacobi1D.nth e jacobi.nth.

Abbiamo già visto che $\dot{f} = \{f, H\}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{p}_j = \{p_j, H\} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \{q_j, H\} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases}}$$

f è costante del moto sse $\{f, H\} = 0$.

Esercizio: verificare (Usando Mathematica) che il vettore di Laplace-Runge-Lenz $\underline{A} = p \wedge \underline{L} - \dfrac{km}{\|\underline{x}\|}\underline{x}$

è una costante del moto per la Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{k}{\|\underline{x}\|}$

dove $\underline{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\|\underline{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\underline{M} = \underline{x} \wedge \underline{p}$

Suggerimenti: si creino 3 Module

1. $\{\cdot,\cdot\}_{(p_x, p_y, p_z, x, y, z)}$

2. scalprod3D, cioè scalprod3D$[\underline{u}, \underline{v}] = \underline{u} \cdot \underline{v}$

3. crossprod$[\underline{u}, \underline{v}] = \underline{u} \wedge \underline{v}$

In Mathematica $v = \{v1, v2, v3\}$
Per estrarre un elemento v[[1]]

$(F, \{\cdot,\cdot\})$ è un'algebra di Poisson

1. è bilineare $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$;

$\forall\ f, g, h \in F,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2. è anticommutativa $\{f, g\} = -\{g, f\}$

3. vale l'id. Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

4. $\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + g\{f, h\}$ (prop. di Leibnitz)

5. $\frac{\partial}{\partial p_i}\{f, g\} = \{\frac{\partial f}{\partial p_i}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial p_i}\}$; $\frac{\partial}{\partial q_i}\{f, g\} = \{\frac{\partial f}{\partial q_i}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial q_i}\}$

Def. (di Trasf. canoniche): Si dice che $(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q})$ è una trasf. canonica se $\forall H = H(\underline{p}, \underline{q})$ le eq. di Hamilton $\dot{p}_j = \{p_j, H\}$, $\dot{q}_j = \{q_j, H\}$ sono equivalenti alle eq. di Ham. nelle nuove coord.

$$\begin{cases} \dot{P}_j = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_j} \\ \dot{Q}_j = \dfrac{\partial K}{\partial P_j} \end{cases}$$

dove $K = H \circ \mathcal{C}$, cioè

$$K(\underline{P}, \underline{Q}) = H(\mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}))$$

Proposizione: Una trasf. $(\underline{p}, \underline{q}) = \varphi(\underline{P}, \underline{Q})$ è canonica sse preserva le parentesi di Poisson.

$$\{f, g\}_{\underline{p}, \underline{q}} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j}$$

$$\{f, g\}_{\underline{P}, \underline{Q}} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial Q_j} \frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial P_j} - \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial P_j} \frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial Q_j}$$

$$\begin{tikzcd}
f, g \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"'] & \varphi f, \varphi g \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"] \\
\{f, g\}_{p,q} \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(\{f,g\}_{p,q}) = \{\varphi f, \varphi g\}_{\underline{P},\underline{Q}}
\end{tikzcd}$$

$\varphi f = f \circ \varphi$, $\varphi g = g \circ \varphi$

Lemma: Una trasf. preserva <u>tutte</u> le par. di Poisson sse preserva quelle fondamentali: $\{P_i, P_j\}_{\underline{P},\underline{Q}} = \{q_i, q_j\}_{\underline{P},\underline{Q}} = 0$, $\{q_i, P_j\}_{\underline{P},\underline{Q}} = \delta_{i,j}$

Corollario: una trasf. è canonica sse preserva le par. di Poisson fondamentali.

Dim. (del lemma): Oss. che

$$\{f,g\}_{P,Q} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_j}$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_j}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \{q_i, g\}_{P,Q} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \{p_i, g\}_{P,Q} \right)$$

$$= \sum_{\ell, i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_\ell} \{q_i, q_\ell\}_{P,Q} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_\ell} \{p_i, p_\ell\}_{P,Q}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_\ell} \{q_i, p_\ell\}_{P,Q} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_\ell} \{p_i, q_\ell\}_{P,Q}$$

C.V.D

(del cammino)

Dim. (della proposizione): Supponiamo che φ preservi le par. di Poisson.

Consideriamo $P_j = P_j(p, q)$, allora

$$\dot{P}_j = \{P_j(p,q), H\}_{p,q} = \{P_j, H(\varphi(P, Q))\}_{P,Q}$$

$$= \{P_j, K\}_{P,Q} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}$$

$\delta_{ij} =$

Partendo da $Q_j = Q_j(\underline{p}, \underline{q})$ e dal calcolo di $\dot{Q}_j = \_\_\_ = \frac{\partial K}{\partial P_j}$ –

Assumiamo ora che $\mathcal{C}$ sia canonica, si consideri q_i come funzione dinamica f e P_j come Hamiltoniana –

$$\dot{q}_i = \{q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad \dot{q}_i = \{q_i(\underline{P}, \underline{Q}), P_j(\underline{P}, \underline{Q})\}_{(\underline{P}, \underline{Q})}$$

$\triangleleft =$ sia $q_i = f$, siccome $K(\underline{P}, \underline{Q}) = P_j(\underline{P}, \underline{Q})$ $\triangledown$

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{dP_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{dQ_j}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial K}{\partial Q_j} + \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial K}{\partial P_j} = \{f, K\}_{\underline{P}, \underline{Q}}$$

$$\delta_{ij} = \{q_i, p_j\}_{\underline{P}, \underline{Q}}$$

Analogamente si dim. che $\{q_i, q_j\}_{\underline{P},\underline{Q}} = \{p_i, p_j\}_{\underline{P},\underline{Q}} = 0$

C.V.D.

Esempio: "cambio di coord. con riscalamento del tempo" -

Sia $H = H(\underline{p}, \underline{q})$, $(\underline{p}, \underline{q}) = \mathcal{C}(\underline{P}, \underline{Q}) = (\alpha \underline{P}, \beta \underline{Q})$ $\quad \alpha, \beta \neq 0$

allora

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_j} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial H}{\partial Q_j}$$

$$\| \quad \frac{\partial p_j}{\partial P_j} \cdot \dot{P}_j = \dot{P}_j \cdot \alpha \Rightarrow \dot{P}_j = -\frac{1}{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial Q_j}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{Q}_j = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial P_j}$$

$\Rightarrow$ le eq. di Ham. hanno conservato la loro struttura con $K = \frac{H(\underline{P}, \underline{Q})}{\alpha\beta}$

La trasf. è canonica quando $\alpha \cdot \beta = 1$

Osservazione. Se poniamo $\underline{x} = (\underline{p}, \underline{q})$ allora le eq. di Ham. si scrivono $\dot{\underline{x}} = J \cdot \nabla_{\underline{x}} H$

dove $\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ come $n \times n$ dim.

e $\underline{\mathrm{Jac}}_{\underline{x}} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}$

Proposizione: Una trasf. $\binom{p}{q} = \mathcal{C}\binom{P}{Q}$ è canonica sse la matrice Jacobiana associata a $\mathcal{C}$ è simplettica (cioè una matr. U si dice simplettica se $U^T J U = J$).

Dim. Non è altro che una riscrittura delle parentesi di Poisson fondamentali

$$\{P_1, P_1\}_{\underline{P},\underline{Q}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_j}\frac{\partial P_1}{\partial P_j} - \frac{\partial P_1}{\partial P_j}\frac{\partial P_1}{\partial Q_j} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial P_1}{\partial P_1}, \dots, \frac{\partial P_1}{\partial P_n}, \frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \dots, \frac{\partial P_1}{\partial Q_n} \right) J \begin{pmatrix} \partial P_1/\partial P_1 \\ \vdots \\ \partial P_1/\partial P_n \\ \partial P_1/\partial Q_1 \\ \vdots \\ \partial P_1/\partial Q_n \end{pmatrix}$$

Ponendo $(\underline{P}, \underline{Q}) = \underline{y}$ (2n-dim) e $(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{u}$

Si verifica che $\underline{u}_{\underline{y}} J \underline{u}_{\underline{y}}^T = \left(\{u_i, u_j\}_{\underline{y}} \right)_{i,j=1,\dots,2n}$)

dove $\underline{u}_{\underline{y}} = \text{Jac}_{\underline{y}}\, \underline{u} = \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\dots,2n}$.

Se la trasf. è canonica allora $\left(\{u_i, u_j\}_{\underline{y}} \right)_{i,j} = J$

$\Rightarrow \underline{u}_{\underline{y}}^T J\, \underline{u}_{\underline{y}} = J$, cioè lo Jacobiano della trasf. $\mathcal{C}$ è una matr. simplettica.

Se $\underline{u}_{\underline{y}}$ è una matr. simplettica $\Rightarrow \left(\{u_i, u_j\}_{\underline{y}} \right)_{i,j} = J$,

quindi $\mathcal{C}$ è canonica.

Osservazione: se $n=1$ (cioè F è 2D), allora richiedere che una trasf. sia canonica è equivalente a richiedere che preservi le aree.

Infatti $(p,q) = \mathcal{C}(P,Q)$ è canonica

sse $\{q,p\}_{P,Q} = 1 = \dfrac{\partial q}{\partial Q}\dfrac{\partial p}{\partial P} - \dfrac{\partial q}{\partial P}\dfrac{\partial p}{\partial Q} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$

$$\int_{\varphi(S')} dq \cdot dp = \int_{S'} dQ\, dP \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$ se

quest'ultimo è uguale a 1 le aree sono preservate.

Esempio di trasf. canonica

$$p = \sqrt{2I} \cos \varphi \quad , \quad q = \sqrt{2I} \sin \varphi$$

dove (I, φ) sono note come le coordinate di azione - angolo per l'oscillatore armonico.

Dobbiamo verificare che

$$1 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial I} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial q}{\partial I} & \frac{\partial q}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2I}} & -\sqrt{2I}\sin\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2I}} & +\sqrt{2I}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Si noti che per l'Ham. dell'osc. arm.

$$H = \frac{\omega}{2}\left(p^2 + q^2\right) = \frac{\omega}{2}\left(2I\cos^2\varphi + 2I\sin^2\varphi\right) = \omega I$$

Siano u, v funzioni dinamiche t.c. $u(\underline{p}, \underline{q})$ e $v(\underline{p}, \underline{q})$ possono essere "invertite".

Def.: Si dice parentesi di Lagrange tra u e v la quantità seguente:

$$[u, v] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial u}\frac{\partial p_j}{\partial v} - \frac{\partial p_j}{\partial u}\frac{\partial q_j}{\partial v}$$

Lemma: Siano $\underline{u} = (\underline{p}, \underline{q})$ e $\underline{v} = (\underline{P}, \underline{Q})$ e $B_{ij} = [u_i, u_j]_{\underline{v}}$ $\forall i, j = 1, \dots, 2n$ e $A_{ij} = \{u_i, u_j\}_{\underline{v}}$ allora

$$A^T B = \mathbb{I}_{2n}$$

Dim.: vedi note del Giorgilli.

Proposizione: Una trasf. è canonica sse preserva tutte le parentesi di Lagrange fondamentali, cioè $B = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} = J$

Dim.: Se la trasf. è canonica allora $A = J$

$$\Rightarrow J^T \cdot B = \mathbb{I} \Rightarrow (J \cdot J^T) B = J \Rightarrow B = J$$

(abbiamo sfruttato che $J^T \cdot J = \mathbb{I}$)

Se $B = J$ allora da $A^T J = \mathbb{I}$

$\Rightarrow A^T (J \cdot J^T) = J^T \Rightarrow A = J$. C.V.D.

Proposizione: Una trasf. $(p, q) = \varphi(\underline{P}, \underline{Q})$ è canonica sse preserva la 2-forma fondamentale $\sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j \left(= \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j \right)$

Sia $f(\underline{x})$ con $\underline{x}$ $2n$-dimensionale viene visto come una 0-forma.

Allora $df = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ è una 1-forma diff.

e $$d^{s+1} f = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{\substack{i_1 \\ \vdots \\ i_n}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f \, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

è la $s+1$-forma diff.

in particolare $$d^2 f = \sum_{1 \le i < j \le 2n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Teorema: Una forma differenziale ω è esatta sse è chiusa

$$\exists\, S \text{ t.c. } dS = \omega \qquad\qquad d\omega = 0$$

Dim. (della proposizione): Partiamo da

$$\sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial Q_i} dQ_i \wedge \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial P_j}{\partial P_i} dP_i \wedge \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial P_j}{\partial Q_i} dQ_i \wedge \frac{\partial q_j}{\partial P_l} dP_l + \frac{\partial P_j}{\partial P_i} dP_i \wedge \frac{\partial q_j}{\partial P_l} dP_l \right)$$

$$= \sum_{1 \le i < l \le n} \left\{ \underbrace{\left(\sum_j \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} - \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{\partial p_j}{\partial Q_l} \right)}_{[Q_i, Q_l]} dQ_i \wedge dQ_l + [P_i, P_l]\, dP_i \wedge dP_l \right\}$$

$$+ \sum_{i,l=1}^{n} [P_i, Q_l]\, dP_i \wedge dQ_l$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j \quad \text{sse}$$

$[Q_i, Q_l] = [P_i, P_l] = 0$ e $[Q_i, P_l] = \delta_{i,l}$ $\forall\, i,l = 1 \dots n$.

C.V.D.