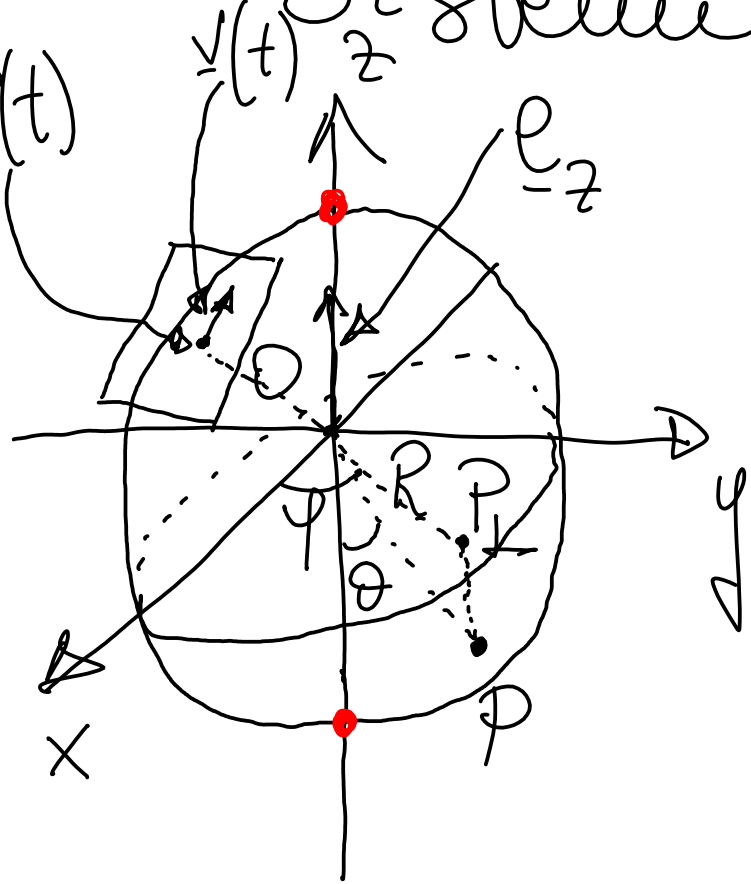


Sistemi lagrangiani (in p.l.l.)
 Esempio: pendolo
 sferico



$$\overrightarrow{OP} = R$$

$$P_{\perp} \in \mathcal{D}_{xy}$$

$$PP_{\perp} \perp e_z$$

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = -R \cos \theta \end{cases}$$

$$L = T - U$$

$$\text{con } U = U(\theta) = -m g R \cos \theta$$

$$T_{(1)} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\Rightarrow L = L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + m g R \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right.$$

In general we

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

Sistemi lagrangiani: $(M, L: M^* \rightarrow \mathbb{R})$

fibro tangente
associato alla

→ varietà differenziabile

oppure solo rappresentati da una
terme: $(M, q, L: q \in M, \dot{q} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$\forall j = 1, \dots, n$

Sistemi Hamiltoniani

Ripartiamo dall'esempio del pendolo sferico

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$H = P_\theta \dot{\theta} + P_\varphi \dot{\varphi} - L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = P_\theta / mR^2 \\ \dot{\varphi} = P_\varphi / mR^2 \sin^2 \theta \end{array} \right.$$

$$= \frac{P_\theta^2}{2mR^2} + \frac{P_\varphi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} - m g R \cos \theta$$

Le eq. di Hamilton per il pendolo sferico

$$\begin{aligned} \dot{P}_\theta &= -\partial H / \partial \theta \\ \dot{P}_\varphi &= -\partial H / \partial \varphi = 0 \\ \dot{\theta} &= \partial H / \partial P_\theta \\ \dot{\varphi} &= \partial H / \partial P_\varphi \end{aligned}$$

Più in generale

Se $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \neq 0$, allora

Le eq. di Lagrange sono eq. a quelle di Hamilton.

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases} \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$\text{dove } H = H(\underline{p}, \underline{q}) =$$

$$= \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \Big|_{\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}(\underline{p}, \underline{q})}$$

Sistemi Hamiltoniani

$$(F, H: F \rightarrow \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$ spazio delle fasi

fibrato cotangente
associato a una varietà
differenziabile

$$(F, (\pi, \gamma), H: \underset{f}{p} \in \mathbb{R}^n, \underset{f}{q} \in M \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j \\ \dot{q}_j = \partial H / \partial p_j \end{cases}$$

$$\forall j=1, \dots, n$$

Sistema autonomo = non c'è dipendenza
esplicita dal tempo.

Sistema non-autonomo $H = H(\underline{p}, \underline{q}, t)$

che è equivalente a un sistema autonomo
 nello sp. delle fasi esteso $2n+2$ -dim -

$$\text{t.c.} - (\underbrace{p_0, p_1, \dots, p_n}_{\underline{p}}, \underbrace{q_0, q_1, \dots, q_n}_{\underline{q}}) = (\underline{p}, \underline{q}, t)$$

Si dice (facilmente) che $t \mapsto (p(t), q(t))$ è soluzione per le eq. di Hamilton per $H = H(p, q, t)$

Se $t \mapsto (p_0(t), p(t), q_0(t) = t, q(t))$ è soluz.

per le eq. con $H^*(p_0, p, q_0, t) = H(p, q, q_0) + p_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial t} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_0 = 1 \rightarrow q_0 = t \end{cases} \Rightarrow \text{vel. che consente a } H^* \text{ di essere costante.}$$

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Pendolo forzato:

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos(\Omega t)$$

la lagr. associata è $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \cos x - \varepsilon x \cos(\Omega t)$

la Ham.

"

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 - \cos x + \varepsilon x \cos(\Omega t)$$

" Ham. esteso "

$$H^* = \frac{1}{2} p_1^2 + p_0 - \cos q_1 + \varepsilon q_1 \cos(\Omega q_0)$$

Parentesi di Poisson

variabile dinamica $f: F \rightarrow \mathbb{R}$

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j + \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^n -\frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} =: \{f, H\}$$

dove $\forall f, g: F \rightarrow \mathbb{R}$, $\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$

$(F, \{ \cdot, \cdot \})$ è un'algebra di Lie,

cioè le parentesi di Poisson $\{ \cdot, \cdot \}$

1. è bilineare $\{ \alpha f + \beta g, h \} =$

$\forall f, g, h \in F, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $= \alpha \{ f, h \} + \beta \{ g, h \};$

2. è anticommutativa $\{ f, g \} = - \{ g, f \}$

3. vale l'id. di Jacobi $\{ f, \{ g, h \} \} + \{ g, \{ h, f \} \} + \{ h, \{ f, g \} \} = 0$