Prova d'esame di Laboratorio di Programmazione Strutturata
per il corso di laurea in Scienze e Tecnologia dei Media
Prova di programmazione in laboratorio – 28 Novembre 2014

Tema d'esame Divisione tra polinomi a coefficienti interi

Metodo di rappresentazione dei polinomi

Consideriamo un generico polinomio $P(x)$ di grado n a coefficienti interi, del tipo

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 \ ,$$

dove $p_i \in \mathbf{Z} \ \forall \ i = 0 \, , \, \ldots \, , \, n$ ed è sicuramente vero che $p_n \neq 0$, altrimenti $P(x)$ non sarebbe di grado n. Per quanto riguarda la notazione, utilizziamo la scrittura $\mathrm{gr}(P)$ per indicare il grado del polinomio $P(x)$.

Un modo semplice per rappresentare un polinomio a coefficienti interi all'interno di un programma, consiste nel definire:

(a) una variabile intera che ospiterà il valore del grado del polinomio in questione;

(b) un vettore di lunghezza fissa N (si noti che deve essere $N \geq n + 1$, dove n è ancora il grado del polinomio che vogliamo rappresentare), i cui elementi saranno posti uguali ai corrispondenti coefficienti del polinomio.

Nota: il polinomio $P(x) = 0$ può essere rappresentato in modo coerente a questo schema, semplicemente ponendo la variabile che ne ospita il grado uguale a $\mathrm{gr}(0) = -1$.

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C**, dove si effettua la stampa su video di un polinomio $P(x)$ rappresentato come descritto sopra. L'input dei valori che caratterizzano il polinomio puo' essere fatto all'interno del programma (e non da tastiera durante l'esecuzione del programma stesso). Inoltre il programma *deve contenere una funzione che esegue la stampa*; questa funzione *deve avere due argomenti*: il grado del polinomio e il vettore che ne rappresenta i coefficienti. La stampa del polinomio *deve avere le seguenti caratteristiche*:

(1) i termini del polinomio vanno stampati in ordine decrescente rispetto al grado di x;

(2) di ciascuno dei termini stampati del polinomio deve essere visualizzato sia il coefficiente che la potenza di x con l'esponente;

(3) quando un termine del polinomio ha coefficiente uguale a zero allora *tutto il termine* non deve essere visualizzato;

(4) se il coefficiente di un termine è positivo, allora la stampa del coefficiente stesso deve essere preceduta da un segno + se e solo se è un termine di grado inferiore al $\mathrm{gr}(P)$;

(5) se il polinomio $P(x) = 0$ (e quindi $\mathrm{gr}(P) = -1$), allora *deve essere visualizzato* solo un simbolo 0;

(6) si vada a capo della riga seguente solo alla fine della stampa del polinomio.

Altri abbellimenti della stampa (ad es. quando un coefficiente e' uguale ad 1 si evita di visualizzarlo, etc.) sono considerati graditi, ma non necessari.

Ad esempio, sia $P(x)$ rappresentato da una variabile `grp` e da un vettore `p`, tali che `grp=4` e `p[0]=2`, `p[1]=-1`, `p[2]=0`, `p[3]=-4` e `p[4]=3`, allora la stampa su video del polinomio deve essere del tipo:

$$3 * \mathtt{x\char`^4}\ \ -4 * \mathtt{x\char`^3}\ \ -1 * \mathtt{x\char`^1}\ \ +2$$

Obiettivo (intermedio) 2:
si aggiungano al programma richiesto dall'obiettivo 1 altre due funzioni e si modifichi il "main program" in modo da effettuare dei controlli di correttezza su di esse.

La prima funzione deve effettuare la moltiplicazione di un polinomio per un coefficiente intero c; questa funzione *deve avere tre argomenti*: il grado del polinomio, il vettore che ne rappresenta i coefficienti e il valore del numero c; se $P(x)$ è il polinomio rappresentato *in entrata della funzione* dai primi due argomenti della funzione, gli stessi argomenti *in uscita della funzione* devono rappresentare $c \cdot P(x)$.
Nota: se $c = 0$, il grado del polinomio deve essere posto uguale a -1 *all'interno della funzione*, quindi il primo argomento della funzione può variare all'interno della funzione e deve allora essere trattato in modo conveniente.

La seconda funzione deve calcolare il prodotto di un polinomio $P(x)$ per una potenza di x del tipo x^j; questa funzione *deve avere cinque argomenti*: il grado del polinomio $P(x)$, il vettore che rappresenta i coefficienti di $P(x)$, il valore del numero intero j, il grado del polinomio $A(x)$ e il vettore che rappresenta i coefficienti di $A(x)$, dove $A(x) = x^j \cdot P(x)$.
Nota: il grado del polinomio $A(x)$ deve essere calcolato all'interno della funzione, quindi il quarto argomento della funzione deve essere trattato in modo conveniente; inoltre si faccia attenzione al caso $P(x) = 0 \implies A(x) = x^j \cdot P(x) = 0$.

Obiettivo (intermedio) 3:
si modifichi il programma dall'obiettivo 2 in modo da aggiungere una nuova funzione e si modifichi il "main program" in modo da effettuare dei controlli di correttezza su di essa.

La suddetta funzione deve aggiungere un primo polinomio $A(x)$ a un secondo polinomio $B(x)$, tali che $\mathrm{gr}(A) \leq \mathrm{gr}(B)$. Essa *deve avere quattro argomenti*: il grado del polinomio $A(x)$, il vettore che rappresenta i coefficienti di $A(x)$, il grado del polinomio $B(x)$ e il vettore che rappresenta i coefficienti di $B(x)$; se $B(x)$ è il polinomio rappresentato *in entrata della funzione* dagli ultimi due argomenti della funzione, gli stessi argomenti *in uscita della funzione* devono rappresentare $A(x) + B(x)$.
Nota: il valore del grado del polinomio $B(x)$ in entrata della funzione può essere diverso da quello in uscita (si pensi al caso $A(x) = -x$ e $B(x) = x + 1$), quindi il terzo argomento della funzione deve essere trattato in modo conveniente.

Obiettivo (finale) 4:
si aggiunga al programma richiesto dall'obiettivo 3 una nuova funzione e si modifichi il "main program" in modo da effettuare dei controlli di correttezza su di essa.

La suddetta funzione, dati un polinomio dividendo $P(x)$ e un polinomio divisore $D(x)$, deve calcolare il polinomio quoziente $Q(x)$ e il polinomio resto $R(x)$ della divisione, in modo tale che $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$. Per semplicità, ci si limiti a considerare dei divisori $D(x)$ tali che il coefficiente del termine di grado massimo è uguale a 1. Questa funzione *deve avere otto argomenti*: il grado e il vettore di coefficienti del polinomio $P(x)$, il grado e il vettore di coefficienti del polinomio $D(x)$, il grado e il vettore di coefficienti del polinomio

$Q(x)$ e il grado e il vettore di coefficienti del polinomio $R(x)$.

Nota: la funzione che esegue la divisione polinomiale, può essere scritta facilmente, facendo ricorso alle funzioni richieste dagli obiettivi 2 e 3; l'algoritmo di calcolo può essere riassunto come segue:

(i) si definisca un polinomio temporaneo (cioe' che sussiste solo all'interno della funzione) $A(x)$;

(ii) si ponga inizialmente $R(x) = P(x)$ e $Q(x) = 0$;

(iii) se $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(D)$, il calcolo è già terminato;

(iv) se la condizione di cui al punto (iii) non è soddisfatta, si ponga $\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(P) - \mathrm{gr}(D)$ e si prosegua l'esecuzione delle istruzioni seguenti;

(v) si eseguano le istruzioni dalla (vi) alla (ix) quando l'indice i va da $\mathrm{gr}(Q)$ fino a 0.

  (vi) si calcoli $A(x) = x^i \cdot D(x)$;

  (vii) si ponga il coefficiente q_i del termine di grado i di $Q(x)$ uguale al termine di grado $i + \mathrm{gr}(D)$ del polinomio $A(x)$;

  (viii) si ridefinisca $A(x)$ in modo tale che sia uguale al prodotto di $A(x)$ stesso (cioé quello calcolato al punto (vi)) per il coefficiente $-q_i$;

  (ix) si ridefinisca $R(x)$ in modo tale che sia uguale alla somma di $A(x)$ e $R(x)$ stesso (cioè quello inizialmente definito uguale a $P(x)$, oppure calcolato all'iterazione precedente del ciclo);

Controlli di correttezza finale del programma

A beneficio delle correzioni finali del programma, quando si deve controllare l'esattezza della divisione polinomiale, si riportano qui di seguito alcuni esempi di identità del tipo $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, dove i polinomi soono a coefficienti interi, il coefficiente del termine di grado massimo di $D(x)$ è uguale a 1 e $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$.

$$2x^4 + 3x^2 - 4x + 5 = (2x^2 + 17)(x^2 - 7) - 4x + 124 \ ;$$
$$3x^5 - 12x^4 + 15x^3 + 6x^2 - 27x + 42 = (3x^2 - 9x + 15)(x^3 - x^2 - 3x - 2) + 72 \ ;$$