

**Prova d'esame di Laboratorio di Programmazione Strutturata
per il corso di laurea in Scienze e Tecnologia dei Media
Prova di programmazione in laboratorio – 24 Febbraio 2014**

Tema d'esame: studio di alcune proprietà dei numeri di Bernoulli.

Descrizione del metodo di calcolo

I numeri di Bernoulli \mathcal{B}_m costituiscono una successione di numeri razionali che permettono di risolvere alcuni problemi in vari campi della matematica. Esistono parecchi modi equivalenti di definire i numeri di Bernoulli, qui di seguito introduciamo preliminarmente un'opportuna generalizzazione. Siano i polinomi (di Bernoulli) $B_m : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tali che

$$(1) \quad B_m(x) = x^m - \sum_{k=0}^{m-1} \left[\binom{m}{k} \frac{B_k(x)}{m-k+1} \right] \quad \forall m \geq 1, \quad B_0(x) = 1.$$

Nella formula precedente, che è evidentemente di tipo *ricorsivo*, compare il coefficiente binomiale:

$$(2) \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

La successione dei numeri di Bernoulli $\{\mathcal{B}_m\}_{m \geq 0}$ è tale che

$$(3) \quad \mathcal{B}_m = B_m(0) \quad \forall m \geq 0.$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà elementari:

- (i) quando l'indice m assume un valore che è contemporaneamente dispari e maggiore o uguale a 3, allora $\mathcal{B}_m = 0$;
- (ii) gli elementi della successione, che sono diversi da zero, hanno segni alterni; ad esempio, $\mathcal{B}_0 = 1, \mathcal{B}_1 = -1/2, \mathcal{B}_2 = 1/6, \mathcal{B}_4 = -1/30, \mathcal{B}_6 = 1/42, \text{ etc.}$;
- (iii) l'uguaglianza $B_m(1) = \mathcal{B}_m$ vale per ogni $m \neq 1$; invece, per $m = 1$ si ha che $B_1(1) = -\mathcal{B}_1 = 1/2$.

I numeri di Bernoulli, tra le altre, soddisfano anche la seguente equazione:

$$(4) \quad \mathcal{B}_m = (-1)^{m/2} 2 \int_0^\infty \frac{m x^{m-1}}{1 - e^{2\pi x}} dx$$

quando m è un numero *pari e positivo*. Inoltre, essi compaiono nelle espansioni in serie di Taylor della funzione tangente (trigonometrica) e della tangente iperbolica. Infatti, $\forall x \in \mathbf{R}$ tale che $|x| < \pi/2$, valgono le due seguenti equazioni:

$$(5) \quad \begin{aligned} \tan x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{m-1} 2^{2m} (2^{2m} - 1) \mathcal{B}_{2m}}{(2m)!} x^{2m-1} \right], \\ \tanh x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2^{2m} (2^{2m} - 1) \mathcal{B}_{2m}}{(2m)!} x^{2m-1} \right]. \end{aligned}$$

Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che, per un dato valore dell'indice m , determina

(approssimativamente) il corrispondente numero di Bernoulli \mathcal{B}_m , tramite il calcolo di un'opportuno integrale. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha come argomenti la “variabile di integrazione” x e il parametro (intero) m ; (alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore di $m x^{m-1}/(1 - e^{2\pi x})$, cioè proprio la funzione integranda che compare nel membro di destra dell'equazione (4);
- (B) una *function* che ha 5 argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numsubint`, un parametro intero p e infine un *puntatore a una function* f , la quale, a sua volta, dipenderà da altri due argomenti di cui il primo è di tipo `double`, mentre il secondo è di tipo `int`; (alla fine della chiamata) tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(x, p) dx$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;
- (C) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (C1) l'*input da tastiera* del valore dell'indice m ; nel programma, la variabile m deve essere di tipo `int`; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se m non è un numero pari compreso tra 2 e 24, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
 - (C2) il calcolo del numero di Bernoulli \mathcal{B}_m , grazie alla valutazione del membro di destra dell'equazione (4), cioè la quantità $(-1)^{m/2} 2 \int_0^\infty [(m x^{m-1})/(1 - e^{2\pi x})] dx$, per mezzo di un'opportuna chiamata della *function* descritta al punto (B) e utilizzando il valore dell'indice m che è stato inserito in *input* così come richiesto al precedente punto (C1); il valore del suddetto integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 10 m]$; inoltre, la *chiamata della function* relativa al punto (B) deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);
 - (C3) la stampa sul video del valore del numero di Bernoulli \mathcal{B}_m , calcolato così come è stato richiesto al precedente punto (C2).

Alcuni consigli

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *function* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da poter valutare il polinomio di Bernoulli $B_m(x)$, in corrispondenza a un argomento $x = n$ intero e utilizzando la formula ricorsiva (1). A tal fine, si proceda come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha due argomenti: gli indici m e k , entrambi di tipo `int`; *all'interno di questa nuova function*, si *sconsiglia* di tradurre la formula esplicita (2) in linguaggio di programmazione, perché genererebbe dei fattori intermedi così grandi che non potrebbero essere rappresentati esattamente sul calcolatore; per ovviare a questo problema, si consiglia invece di procedere come descritto ai seguenti punti (A1)–(A3):
 - (A1) si effettui la definizione iniziale di una *variabile locale* `ris` di tipo `double` in modo

che sia `ris = 1`;

- (A2) si iterino le operazioni descritte al seguente punto (A21), mentre un contatore intero j va da 1 fino a k ;
- (A21) si aggiorni il valore di `ris` ponendolo uguale al risultato che si ottiene moltiplicando il “vecchio” valore di `ris` per $m - j + 1$, per poi dividere tale prodotto per j ;
- (A3) si restituisca il valore di `ris` che, al termine del ciclo descritto ai precedenti punti (A2)–(A21), è proprio uguale al coefficiente binomiale definito in (2);
- (B) si scriva un’altra *function* che ha due argomenti: l’indice m e la variabile n , entrambi di tipo `int`; tale *function* deve essere di tipo *ricorsivo* e al termine della chiamata deve restituire il valore di $B_m(n)$, che viene calcolato utilizzando la formula ricorsiva (1);
- (C) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (C1) *l’input da tastiera* del valore dell’indice n ; tale valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se n non è compreso tra 0 e 10, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
 - (C2) il calcolo della quantità $B_m(n)$ grazie a un’opportuna chiamata della *function* descritta al punto (B) e utilizzando i valori delle variabili intere m e n che sono stati inseriti così come richiesto al punto (C1) dell’obiettivo 1 e al precedente punto (C1), rispettivamente;
 - (C3) la stampa sul video del valore della quantità $B_m(n)$ appena calcolata così come è stato richiesto al precedente punto (C2).

Alcuni altri consigli

Porre $n = 0$ oppure $n = 1$ (nella fase di *input* richiesta al punto (C1)) è senz’altro un utile test per la correttezza del programma. Infatti, si ricordi che $B_m = B_m(0) = B_m(1) \forall m \geq 2$, quindi, quando $n = 0$ oppure $n = 1$, allora i valori stampati sullo schermo così come richiesto ad entrambi i punti (C3) (sia dell’obiettivo 1 che del presente obiettivo) devono essere uguali a meno degli inevitabili errori numerici.

Obiettivo (finale) 3:

si integri il programma richiesto dall’obiettivo 2, in modo tale da effettuare il calcolo “simultaneo” della funzione tangente (trigonometrica) e della tangente iperbolica, utilizzando le espansioni in serie che compaiono in formula (5). A tal fine, si può procedere come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: il primo è un valore x di tipo `double`, mentre gli ultimi due *devono essere tali da restituire all’ambiente chiamante* i valori della tangente trigonometrica e della tangente iperbolica in corrispondenza a x (cioè, rispettivamente, le approssimazioni numeriche di $\tan(x)$ e $\tanh(x)$); qui di seguito indichiamo con `tang` e `tang_ip` le variabili che alla fine dell’esecuzione di tale *function* conterranno proprio i valori approssimati di $\tan(x)$ e $\tanh(x)$, rispettivamente; allo scopo di calcolarli, si proceda così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A5);
- (A1) si effettuino le definizioni iniziali di una coppia di *variabili locali* di tipo `int`, in modo che sia $m = 0$ e $\sigma = 1$;
- (A2) si effettuino le definizioni iniziali di alcune *variabili locali* di tipo `double`, in modo che sia `fatt = 2`, `pot2 = 4`, `potx = x`;
- (A3) si ponga inizialmente `tang = 0` e `tang_ip = 0`;

- (A4) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A41)–(A49) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A5);
- (A41) si (ri)aggiornino i valori di `tang_prec` e `tang_ip_prec` in modo tale che siano posti uguali rispettivamente a `tang` e `tang_ip`, in altri termini nelle *variabili locali* `tang_prec` e `tang_ip_prec` vengono memorizzati i valori della tangente trigonometrica e della tangente iperbolica così come sono stati approssimati prima della corrente iterazione del ciclo;
- (A42) si incrementi di 1 il valore del contatore `m`;
- (A43) si memorizzi in una variabile locale `coef` il valore del contributo del termine di indice `m` che compare nella serie di Taylor che definisce la tangente iperbolica; tale contributo altro non è che $\text{coef} = [2^{2m}(2^{2m} - 1)\mathcal{B}_{2m}x^{2m-1}]/[(2m)!]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente grazie a un'opportuna chiamata della function descritta al punto (B) dell'obiettivo 2 e utilizzando opportunamente le variabili* `pot2`, `potx` e `fatt`;
- (A44) si aggiorni il valore di `tang`, aggiungendovi il contributo del termine di indice `m` che compare nella serie di Taylor, la quale definisce $\tan(x)$ in formula (5); tale contributo altro non è che il prodotto tra i valori delle variabili `σ` e `coef`;
- (A45) si aggiorni il valore di `tang_ip`, aggiungendovi il contributo del termine di indice `m` che compare nella serie di Taylor, la quale definisce $\tanh(x)$ in formula (5); tale contributo altro non è che il valore della variabile `coef`;
- (A46) si cambi il segno della variabile `σ` (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\sigma = (-1)^m$);
- (A47) si aggiorni il valore della variabile `fatt` moltiplicandolo per $(2m + 1)(2m + 2)$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\text{fatt} = (2m + 2)!$);
- (A48) si aggiorni il valore della variabile `pot2` moltiplicandolo per 4 (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\text{pot2} = 2^{2(m+1)}$);
- (A49) si aggiorni il valore della variabile `potx` moltiplicandolo per x^2 (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\text{potx} = x^{2m+1}$);
- (A5) *se* il valore di `tang` è diverso da quello di `tang_prec` *oppure* il valore di `tang_ip` è diverso da quello di `tang_ip_prec`, allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A41)–(A49);
- (B) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
 - (B1) *l'input da tastiera* del valore dell'argomento `x`; tale valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se $|x|$ *non è minore* di $\pi/10$, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;
 - (B2) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da calcolare l'approssimazione numerica di $\tan(x)$ e $\tanh(x)$, dove il valore di `x` altro non è che quello inserito in *input* così come richiesto al precedente punto (B1);
 - (B3) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra il valore di $\tan(x)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B2) e quello che si ottiene evocando la *function* `tan` (che fa parte della libreria matematica del linguaggio **C**);
 - (B4) la stampa sul video *in formato esponenziale* del valore assoluto della differenza tra il valore di $\tanh(x)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B2) e quello

che si ottiene evocando la *function* `tanh` (che fa parte della libreria matematica del linguaggio **C**);

Ovviamente, la verifica numerica del calcolo “simultaneo” (per espansione in serie) della funzione tangente (trigonometrica) e della tangente iperbolica *può considerarsi ben riuscita*, quando entrambi i valori assoluti delle suddette differenze (di cui sono richieste le stampe sullo schermo ai precedenti punti (B3)–(B4)) sono circa dell’ordine di grandezza dell’*errore di macchina*.