Prova d'esame di Laboratorio di Programmazione Strutturata
per il corso di laurea in Scienze e Tecnologia dei Media
Prova di programmazione in laboratorio – 27 Settembre 2013

Tema d'esame: studio di alcune proprietà delle funzioni di Bessel di prima specie, che sono di particolare interesse in meccanica celeste.

Descrizione del metodo di calcolo

Le funzioni di Bessel di prima specie $J_n(x)$ risolvono l'equazione differenziale seguente (che ha per incognita la funzione $y = y(x)$):

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \ , \tag{1}$$

dove $n \in \mathbf{N}$. Tali soluzioni sono *analitiche* e possono essere espresse in serie di Taylor centrate rispetto all'origine. Infatti, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ possiamo dare la seguente definizione esplicita:

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \ . \tag{2}$$

Inoltre, dalla formula precedente si possono ricavare facilmente le espansioni in serie della derivata della generica funzione di Bessel di prima specie; infatti, essa è data dalle seguenti equazioni:

$$J_n'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+n)}{2\big(j!\,(j+n)!\big)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j-1} \ , \tag{3}$$

È facile dimostrare che le serie che compaiono nel membri di destra delle formule (2)–(3) convergono $\forall\, x \in \mathbf{R}$, quindi sia J_n che J_n' sono ben definite dalle equazioni (2)–(3) *su tutta l'asse dei numeri reali* e per ogni indice $n \in \mathbf{N}$.

Le funzioni di Bessel compaiono nelle soluzioni di alcuni importanti problemi fisici. Nel seguito di queste brevi note, consideriamo in particolare la scrittura di alcuni sviluppi classici in meccanica celeste. Per comprendere di cosa si tratta, ricordiamo brevemente che in meccanica celeste è abituale descrivere i moti con gli *elementi orbitali*, che a un fissato istante descrivono la cosiddetta "ellisse osculatrice". Essa è definita in modo tale che su tale ellisse si svolge un moto virtuale in accordo con la seconda legge di Keplero e che ha *in quel fissato istante* uguali posizioni e velocità rispetto al moto di P che si sta considerando. Gli elementi orbitali relativi a moti *all'interno di un piano* sono quattro: $(a,\, e,\, \omega,\, M)$. a, e e ω sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'*eccentricità* e un angolo che individua il pericentro della "ellisse osculatrice", mentre M è l'*anomalia media*, cioè un opportuno angolo virtuale grazie al quale si può determinare in modo univoco la posizione del punto P sulla "ellisse osculatrice". Al fine di poter localizzare un punto, le cui coordinate cartesiane nel piano sono corrispondenti a certi valori $(a,\, e,\, \omega,\, M)$ degli elementi orbitali, bisogna per prima cosa risolvere la seguente equazione di Keplero:

$$\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - M = 0 \tag{4}$$

rispetto all'incognita $\mathcal{E}$, che prende il nome di *anomalia eccentrica.* Sia inoltre

$$\mathcal{K}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - e\sin\mathcal{E} - M \tag{5}$$

la mappa che restituisce il valore del membro di sinistra dell'equazione (4) in funzione della sola $\mathcal{E}$ per valori fissati di e e di M. In queste brevi note, ci limitiamo a ricordare che se l'eccentricità $0 < e < 1$ (come accade ogni qualvolta che la conica osculatrice è proprio un'ellisse), allora si prova facilmente che la soluzione dell'equazione (4) esiste, è unica e appartiene all'intervallo $(l - e, l + e)$. L'angolo che effettivamente localizza il punto P sulla "ellisse osculatrice" (sia pure a partire dal pericentro) è l'*anomalia vera* v che è espressa in funzione di $\mathcal{E}$ grazie alla seguente relazione:

$$v = 2\,\mathrm{atan}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right)\right) \ . \tag{6}$$

Molti problemi fondamentali in meccanica celeste richiedono l'utilizzo delle seguenti espansioni in serie di potenze dell'eccentricità e:

$$\begin{aligned} \cos v &= -e + \frac{2\big(1-e^2\big)}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\big[J_n(ne)\cos(nM)\big] \\ \sin v &= 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\big[J_n'(ne)\sin(nM)\big] \end{aligned} \ , \tag{7}$$

dove, evidentemente, appaiono le funzioni di Bessel di prima specie J_n e le loro derivate J_n', come definite dalle formule (2)–(3). Le equazioni nella formula precedente evidenziano che entrambe le funzioni $M \mapsto \cos\big(v(M;e)\big)$ e $M \mapsto \sin\big(v(M;e)\big)$ sono evidentemente periodiche di periodo 2π, per ogni fissato valore del parametro $e \in (0,1)$. Interpretando queste ultime equazioni come *serie di Fourier*, tramite il calcolo di opportuni integrali, possiamo facilmente determinare i coefficienti che moltiplicano, rispettivamente, i termini $\cos(nM)$ e $\sin(nM)$. Infatti, sussistono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} J_n(ne) &= \frac{e}{2\pi\big(1-e^2\big)}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}M\,\Big[\cos\big(v(M;e)\big)\cos(nM)\Big] \\ J_n'(ne) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}M\,\Big[\sin\big(v(M;e)\big)\sin(nM)\Big] \end{aligned} \ . \tag{8}$$

Si noti che queste ultime due equazioni possono fungere da definizioni alternative delle funzioni di Bessel di prima specie J_n e delle loro derivate J_n'. Ovviamente, in (8) sia $\cos\big(v(M;e)\big)$ che $\sin\big(v(M;e)\big)$ sono da interpretare come funzioni dell'*anomalia media* M (con valore *fissato* del parametro *eccentricità* e), perché il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$ viene determinato usando le equazioni (4) e (6).

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che, per dati valori dell'eccentricità e e dell'anomalia media M, determina il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$. Il programma deve contenere:

(A) una *function* che ha come argomenti tre variabili di tipo `double`, che qui denotiamo con i simboli M , e e σ ; essa deve restituire il corrispondente valore di $v(M;e)$, definito dalle equazioni (4) e (6); all'interno di tale *function*, il calcolo approssimato di $v(M;e)$ *deve* essere effettuato *utilizzando il metodo di Newton* (adattato all'equazione implicita (4)) così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A5);

(A1) inizialmente, si assegni alla variabile *locale* $\mathcal{E}$ il valore M come prima approssimazione della soluzione dell'equazione (4);

(A2) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A21)–(A24) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A3);

(A21) si assegni alla variabile *locale* `KE` il valore di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, cioè il secondo membro della formula (5);

(A22) si assegni alla variabile *locale* `dK` il valore di $\mathcal{K}'(\mathcal{E})$, dove è ovvio che la derivata è tale che $\mathcal{K}'(\mathcal{E}) = 1 - e\cos\mathcal{E}$;

(A23) si assegni alla variabile *locale* `dE` il valore del *rapporto* tra `KE` e `dK` ;

(A24) si calcoli una nuova approssimazione della soluzione seguendo il metodo di Newton; a questo scopo si modifichi la variabile *locale* $\mathcal{E}$ sottraendo al suo valore precedente la quantità `dE` ;

(A3) se il *valore assoluto dello scostamento* `dE` (che, in pratica, descrive l'imprecisione con la quale è stata determinata la soluzione $\mathcal{E}$) è maggiore della *soglia di tolleranza* σ , cioè se si verifica che

$$\left|\mathtt{dE}\right| > \sigma \ ,$$

allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A21)–(A24);

(A4) si assegni alla variabile *locale* `v` il valore del secondo membro della formula (6);

(A5) si restituisca all'ambiente chiamante (della *function* che stiamo descrivendo) il valore di `v`;

(B) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

(B1) l'*input da tastiera* del valore dell'eccentricità e ; nel programma, la variabile e deve essere di tipo `double`; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se e *non appartiene all'intervallo* $[0,1)$, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(B2) l'*input da tastiera* del valore dell'anomalia media M ; nel programma, la variabile M deve essere di tipo `double`; il valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se M *non appartiene all'intervallo* $[0,\pi]$, allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(B3) *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da calcolare numericamente il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$ con una soglia di tolleranza $\sigma = 10^{-15}$ (per quanto concerne la soluzione dell'equazione implicita (4));

(B4) la stampa sul video del valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$, calcolato così come è stato richiesto al precedente punto (B3);

(B5) al fine di verificare la correttezza del calcolo dell'*anomalia vera*, dapprima, si assegni alla variabile *locale* $\mathcal{E}$ il corrispondente valore dell'*anomalia eccentrica*, ponendo

$$\mathcal{E} = 2\,\mathrm{atan}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\left(\frac{v(M;e)}{2}\right)\right) \ ;$$

successivamente, si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore assoluto di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, cioè

$$\big|\mathcal{E} - e\sin\mathcal{E} - M\big| \ .$$

Ovviamente, la determinazione numerica dell'*anomalia vera* $v(M;e)$ *può considerarsi ben riuscita*, quando quest'ultima quantità visualizzata sullo schermo (cioè il valore assoluto di $\mathcal{K}(\mathcal{E})$) è circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*

Alcuni consigli

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare (e, eventualmente, modificare) delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da poter calcolare il valore della funzione di Bessel di prima specie J_n e della sua derivata J_n' , usando le equazioni contenute nella formula (8). A tal fine, si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha tre argomenti: la "variabile di integrazione" M , i parametri n ed e ; siano il primo e il terzo di questi tre argomenti (cioè M ed e) di tipo `double`, mentre il secondo (cioè n) sia di tipo `int`; *all'interno di questa nuova function*, si calcoli numericamente il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$ con *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore di $\cos\big(v(M;e)\big)\cos(nM)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nella prima equazione della formula (8);

(B) si scriva un'altra *function* che è molto simile a quella richiesta al punto (A) ed ha anch'essa tre argomenti: la "variabile di integrazione" M , i parametri n ed e ; siano il primo e il terzo di questi tre argomenti (cioè M ed e) di tipo `double`, mentre il secondo (cioè n) sia di tipo `int`; *all'interno di questa nuova function*, si calcoli numericamente il corrispondente valore dell'*anomalia vera* $v(M;e)$ con *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A) dell'obiettivo 1*; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore di $\sin\big(v(M;e)\big)\sin(nM)$, cioè proprio la funzione integranda che compare nella prima equazione della formula (8);

(C) si scriva una *function* che ha 6 argomenti: gli estremi a e b di un intervallo di integrazione, il numero di sotto-intervalli `numsubint` , un parametro intero p_1 , un altro parametro reale p_2 e infine un *puntatore a una function f*, la quale, a sua volta, dipenderà da altri tre argomenti di cui il primo e il terzo sono di tipo `double`, mentre il secondo è di tipo `int`; *(alla fine della chiamata)* tale *function* deve restituire il valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^b f(t,p_1,p_2)\,\mathrm{d}t$, che viene calcolato utilizzando il *metodo del punto medio* basato su una griglia di `numsubint` sotto-intervalli;

(D) la *main function* deve essere *ampliata* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

   (D1) *l'input da tastiera* del valore dell'indice n ; tale valore inserito in *input* deve essere sottoposto a un test in modo tale che, se n *non è maggiore di* 0 , allora esso deve essere *reinserito correttamente*;

(D2) il calcolo della quantità $e/[2\pi\big(1-e^2\big)]\int_0^{2\pi} \mathrm{d}M\,\big[\cos(v(M;e))\cos(nM)\big]$ grazie a *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (C)* e utilizzando il valore dell'eccentricità che è stato inserito in *input* così come richiesto al punto (B1) dell'obiettivo 1; il valore del suddetto integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 2\pi]$; inoltre, la *chiamata della function relativa al punto (C)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (A);

(D3) il calcolo della quantità $1/[2\pi\sqrt{1-e^2}]\int_0^{2\pi} \mathrm{d}M\,\big[\sin(v(M;e))\sin(nM)\big]$ grazie a *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (C)* e utilizzando il valore dell'eccentricità che è stato inserito in *input* così come richiesto al punto (B1) dell'obiettivo 1 (procedendo, quindi, in modo simile a quanto richiesto al precedente punto (D2)); il valore del suddetto integrale deve essere approssimato utilizzando 100 000 sotto-intervalli dell'insieme di integrazione $[0, 2\pi]$; inoltre, la *chiamata della function relativa al punto (C)* deve essere tale che, tra gli argomenti, viene passato anche l'indirizzo della *function* descritta al punto (B);

(D4) la stampa sul video dei valori delle due quantità appena calcolate così come è stato richiesto ai precedenti punti (D2) e (D3); esse sono rispettivamente uguali a $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, proprio a causa delle equazioni contenute nella formula (8).

Obiettivo (finale) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da effettuare il calcolo "simultaneo" della funzione di Bessel di prima specie $J_n(x)$ e della sua derivata $J'_n(x)$, utilizzando le espansioni in serie in (2) e (3) quando $x = ne$. Inoltre, si verifichi che tale calcolo "simultaneo" è corretto eseguendo gli opportuni confronti con i valori di $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, che sono già stati ottenuti in precedenza così come richiesto all'interno dell'obiettivo 2. A tal fine, si proceda come segue:

(A) si scriva una *function* che ha quattro argomenti: il primo è un indice intero n, il secondo è un valore x di tipo `double`, mentre gli ultimi due *devono essere tali da restituire all'ambiente chiamante* il valore della n–esima funzione di Bessel di prima specie valutata in corrispondenza a x e della sua derivata (cioè, rispettivamente, $J_n(x)$ e $J'_n(x)$); qui di seguito indichiamo rispettivamente con `Jn` e `derJn` le variabili che alla fine dell'esecuzione di tale *function* conterranno, rispettivamente, i valori di approssimati di $J_n(x)$ e $J'_n(x)$; allo scopo di calcolarli, si proceda così come descritto ai seguenti punti (A1)–(A7);

(A1) si effettuino le definizioni iniziali di alcune *variabili locali*, in modo che $\texttt{fatt1} = 1$, $\texttt{fatt2} = n!$, $j = 0$, $\sigma = 1$ e $\mathcal{P} = (x/2)^{n-1}$;

(A2) si ponga inizialmente $\texttt{derJn} = ((n\mathcal{P})/2)/\texttt{fatt2}$;

(A3) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{P}$ moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^n$);

(A4) si ponga inizialmente $\texttt{Jn} = \mathcal{P}/\texttt{fatt2}$;

(A5) si iterino le operazioni descritte ai seguenti punti (A51)–(A58) mentre è verificata la condizione (di permanenza nel ciclo), che è espressa al punto (A6);

(A51) si (ri)aggiornino i valori di `Jnprec` e `derJnprec` in modo tale che siano posti uguali rispettivamente a `Jn` e `derJn`, in altri termini nelle *variabili locali* `Jnprec` e `derJnprec` vengono memorizzati i valori della funzione di Bessel di prima specie e della sua derivata così come sono stati calcolati prima della corrente iterazione del ciclo;

(A52) si incrementi di 1 il valore del contatore j ; si cambi il segno della variabile σ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\sigma = (-1)^j$);

(A53) si aggiorni il valore della variabile `fatt1` moltiplicandolo per j (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che `fatt1` $= j!$);

(A54) si aggiorni il valore della variabile `fatt2` moltiplicandolo per $n+j$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che `fatt1` $= (n+j)!$);

(A55) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{P}$ moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^{n+2j-1}$);

(A56) si aggiorni il valore di `derJn` , aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J'_n(x)$ in formula (3); tale contributo altro non è che $(-1)^j(2j+n)\big(x/2\big)^{n+2j-1}/\big[2\big(j!\,(j+n)!\big)\big]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ , $\mathcal{P}$, `fatt1` e `fatt2` ;

(A57) si aggiorni il valore della variabile $\mathcal{P}$ moltiplicandolo per $x/2$ (si osservi che, dopo l'esecuzione di questa istruzione, si ha che $\mathcal{P} = (x/2)^{n+2j}$);

(A58) si aggiorni il valore di `Jn` , aggiungendovi il contributo del termine di indice j che compare nella serie di Taylor che definisce $J_n(x)$ in formula (2); tale contributo altro non è che $(-1)^j(x/2)^{n+2j}/\big[j!\,(j+n)!\big]$, ma nel programma *esso deve essere espresso in modo equivalente utilizzando opportunamente le variabili* σ , $\mathcal{P}$, `fatt1` e `fatt2` ;

(A6) *se* il valore di `Jn` è diverso da quello di `Jnprec` *oppure* il valore di `derJn` è diverso da quello di `derJnprec` , allora si torni a ripetere le operazioni descritte ai precedenti punti (A51)–(A58);

(B) all'interno della *main function*, si effettui *un'opportuna chiamata della function descritta al punto (A)*, in modo da calcolare $J_n(ne)$ e $J'_n(ne)$, dove i valori di n e e sono ancora quelli inseriti in *input* così come richiesto, rispettivamente, ai punti (D1) dell'obiettivo 2 e (B1) dell'obiettivo 1;

(C) all'interno della *main function*, si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore assoluto della differenza tra il valore di $J_n(ne)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B) e quello calcolato così come al punto (D2) dell'obiettivo 2; in modo simile, si stampi sul video *in formato esponenziale* anche il valore assoluto della differenza tra il valore di $J'_n(ne)$ calcolato così come richiesto al precedente punto (B) e quello calcolato così come al punto (D3) dell'obiettivo 2.

Ovviamente, la verifica numerica del calcolo (in due diversi modi) della funzione di Bessel di prima specie e della sua derivata *può considerarsi ben riuscita* quando entrambi i valori assoluti delle suddette differenze sono circa dell'ordine di grandezza dell'*errore di macchina.*