Scheda di lavoro N. 9

Questa è *la scheda del* π. Si tratta di alcuni dei numerosissimi metodi ideati dai matematici, da Pitagora in poi, per calcolare un valore approssimato del rapporto tra la circonferenza ed il diametro — π, per l'appunto.

Il vero scopo è introdurre qualche esercizio che preveda la traduzione di un formula matematica non banale in una funzione. Tutti gli esercizi di questa scheda richiedono il calcolo si una formula ricorrente, con un qualche criterio su dove fermarsi. La difficoltà sta proprio nel costruire un algoritmo che si fonda su una formula ricorrente. Gli strumenti indispensabili più che il calcolatore o il text editor o il compilatore sono carta, matita e gomma.

1. Archimede ha proposto di calcolare il valore di π approssimando una circonferenza di raggio 1 con poligoni regolari inscritti e circoscritti. Se si indica con P_n il perimetro del poligono regolare inscritto e con Q_n quello del perimetro regolare circoscritto vale sempre $P(n) < 2\pi < Q_n$. D'altra parte la successione P_n è crescente, mentre la successione Q_n è decrescente. Infine, la differenza $Q_n - P_n$ tende a zero al crescere di n.

Come primo esercizio prova a scrivere un programma che calcoli e scriva un certo numero di termini delle successioni P_n e Q_n, in modo da osservarne direttamente il comportamento. Se ti serve aiuto, continua a leggere.

Con un po' di trigonometria è facile ricavare le formule

$$P_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \ , \quad Q_n = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \ .$$

Il difetto di queste formule è che non solo suppongono che si sappiano calcolare le funzioni trigonometriche, ma richiedono anche che si conosca il valore di π. Come dire che se si conosce il valore di π allora si sa calcolare il valore di π ...

Evidentemente occorre trovare una scappatoia. Che c'è, in effetti: basta osservare che per alcuni poligoni regolari la lunghezza del lato si sa calcolare con metodi puramente algebrici. Così, per $n = 4$ si ha che il lato del quadrato inscritto è $\sqrt{(2)}$, mentre quello del lato circoscritto è 1. Per $n = 6$ si ha invece che il lato dell'esagono inscritto è 1, mentre quello dell'esagono circoscritto è $2/\sqrt{3}$. Inoltre si sa come calcolare il perimetro di un poligono regolare di lato $2n$ a condizione che il perimetro del poligono regolare di lato n sia noto. Ecco come si fa.

Si parte con le formule trigonometriche

$$\tan x = \frac{\sin(2x)\tan(2x)}{\sin(2x) + \tan(2x)} \ , \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin(2x) \tan x} \ ,$$

e da qui si ricavano le relazioni ricorrenti

$$Q_{2n} = \frac{2Q_n P_n}{Q_n + P_n} \ , \quad P_{2n} = \sqrt{Q_{2n} P_n} \ .$$

Si possono dunque calcolare due coppie distinte di successioni partendo con $n = 4$ oppure con $n = 6$. Si tratta semplicemente di tradurre in istruzioni questa formula trigonometrica.

In altre parole, dovrai costruire un ciclo `for`. Proviamo a partire dal quadrato; ecco cosa dovrai fare:

(i.a) poni inizialmente `p=sqrt(2.); q=2.;` ed azzera un contatore;

(i.b) ad ogni iterazione applica la formula ricorrente scritta qui sopra, aggiornando direttamente le variabili `p` e `q`; eccoti le istruzioni:

```
q = 2.*q*p/(q+p);
p = sqrt(q*p);
```

(guardale bene queste formule: nella seconda è essenziale far uso del valore di `q` già aggiornato); stampa i valori, e, già che ci sei, anche la differenza;

(i.c) concludi il ciclo dopo un certo numero di iterazioni.

Eccoti qualche altro suggerimento.

- Attenzione a non pretendere troppo: le moltiplicazioni successive per 2 portano rapidamente all' overflow di un contatore intero. D'altra parte vedrai facilmente che le successioni convergono piuttosto rapidamente (sai stimare l' errore per un valore fissato di n?).
- Se dopo un' ora non hai capito come scrivere il programma prova a guardare il file `archimede.c` sul dischetto.

2. Prova a tradurre il programma dell'esercizio 1 in una funzione

`double pi_archimede(double err)`

che restituisca il valore di π con l'approssimazione `err` che desideri (entro i limiti della precisione di macchina). In paratica `err` non potrà essere inferiore a 10^{-15}, ma potrai divertirti a farla variare entro limiti ampi.

Il calcolo da eseguire dentro la funzione sarà praticamente identico a quello del programma dell'esercizio 1, salvo in un punto: il ciclo `for` non avrà bisogno di un contatore, e si dovrà interrompere quando la differenza tra `p` e `q` sarà diventata più piccola di `err` (attenzione al segno!). In questa situazione, meglio far uso di un ciclo `while`. A te svolgere l'esercizio. Troverai l'esempio nel file `pi_archimede.c`.

3. Nel 1682 G. W. Leibniz pubblica la serie dell'arcotangente, dalla quale ottiene facilmente lo sviluppo in serie

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

Commento di Leibniz: *Dio ama i numeri dispari.* Se provi a programmare questa formula avrai un' idea di quanto illusorio possa essere usare una serie lentamente convergente per un calcolo.

Suggerimenti:

- Se ci pensi un momento ti renderai conto che occorre calcolare un numero molto alto di termini per avere un' approssimazione accettabile. Stampare tutte le approssimazioni sarebbe lungo e noioso. È conveniente stampare solo le approssimazioni corrispondenti ai passi 1, 2, 4, 8, 16, &c.
- Se dopo un' ora hai la sensazione di trovarti in una selva oscura, prova a guardare il file `leibniz.c` sul dischetto.

4. Ancora dalla serie dell' arcotangente si ricava

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \frac{1}{13\cdot 3^6} + \ldots\right)$$

Suggerimenti:

- Il programma è una variazione abbastanza semplice rispetto al precedente. Noterai però che la serie converge molto più rapidamente.
- Se dopo un' ora concludi che ti sei smarrito nella foresta non aspettare di incontrare Pollicino: prova a guardare il file `leibniz1.c` sul dischetto.

5. Una formula notevole, dovuta ad Eulero, è quella che fornisce la somma degli inversi dei quadrati dei numeri interi:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Suggerimenti:

- Anche questo programma è una variazione abbastanza semplice rispetto ai precedenti.
- Se dopo due ore arrivi ancora alla conclusione che ti sei samrrito nel bosco, comincia a preoccuparti... il lupo è vicino!... E questa volta il programmino già fatto non c' è.

6. Nel 1593 F. Viète pubblica la formula

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots}$$

Sapresti programmarla?

Suggerimenti:

- Prima di buttarti a scrivere decine di istruzioni rifletti sulla forma del denominatore, e cerca di scriverlo in forma ricorsiva.
- Se dopo un' ora di vane fatiche non ne sei venuto a capo prova a guardare il programma `viete.c` sul dischetto.

7. L' esercizio che segue è un' applicazione del tutto elementare (ed utile solo come esercizio!) dei metodi di calcolo che fanno uso di successioni pseudo–casuali di numeri (comunemente detti "metodi Montecarlo"). Alla base c' è l' osservazione che il rapporto tra l' area di un cerchio inscritto in un quadrato e l'area del quadrato è $\pi/4$. Si genera una successione di N punti pseudo–casuali all' interno di un quadrato e si contano i punti che cadono all' interno del cerchio inscritto nel quadrato; poniamo che quest' ultimo numero sia m. Allora (a condizione che la successione sia "buona") il rapporto $4m/N$ fornisce un' approssimazione di π tanto migliore quanto più grande è N: la differenza col valore esatto decresce come $1/\sqrt{N}$.

Il problema è stabilire cosa sia una successione "buona" o "pseudo–casuale", e come generarla mediante il calcolatore. La questione è troppo vasta per trovar posto in una scheda di lavoro come questa. Tuttavia si può usare come metodo elementare la cosiddetta *mappa del gatto di Arnold.* Si parte da un punto arbitrario nel quadrato $[0,1)\times[0,1)$, ossia da due numeri x, y tra 0 e 1, e si costruisce la successione di punti generata trasformando iterativamente (x, y) in $\bigl(2x + y\,, x + y\bigr)$ (mod 1). La successione calcolata dipende dalla scelta del punto iniziale, ovviamente. Ma risulta che il calcolo funziona bene nella maggior parte dei casi: alcune scelte del punto iniziale sono particolarmente cattive (quali?).

Suggerimenti:

- Il numero di punti da calcolare dovrà essere abbastanza alto. Ricordando che l' errore è dell' ordine di $1/\sqrt{N}$ occorrerà, ad esempio, $n \sim 10^4$ per avere a disposizione 2 cifre (ragionevolmente). D'altra parte incrementare il numero di punti significa inevitabilmente incrementare i tempi di calcolo. Occorre trovare un compromesso ragionevole tra precisione e tempo.
- Per seguire le approssimazioni successive è opportuno stampare di tanto in tanto il valore corrente, magari accompagnato dalla differenza rispetto al valore vero (per la macchina, s'intende). Quest' ultimo può calcolarsi come `4*atan(1.)` (il quadruplo dell'arcotangente di 1). Le librerie matematiche sono solitamente costruite in modo da assicurare il calcolo del valore corretto, entro i limiti di approssimazione della macchina.
- Dal momento che l' errore è stimato essere dell' ordine di una potenza di N la lettura dei risultati viene considerevolmente facilitata se si stampano i valori approssimati per numeri di N che crescono in successione geometrica. Ad esempio, per $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \&c.$
- Se dopo un' ora ancora non hai idee su come scrivere il programma prova a guardare il file `pigreco.c` sul dischetto.