

**Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I**  
**per il corso di laurea in Matematica**  
**16 Giugno 2009**

**Tema d'esame:** Calcolo delle funzioni trigonometriche  $\sin x$  e  $\cos x$  grazie a delle espansioni in serie centrate attorno a un punto  $\bar{x}$  vicino a  $x$ , i cui corrispondenti valori  $\sin \bar{x}$  e  $\cos \bar{x}$  sono calcolati utilizzando opportunamente alcune ben note identità trigonometriche.

**Descrizione del metodo di calcolo**

Per semplicità, ci si limiti a considerare  $x \in [0, \pi/4]$ ; a partire da questo intervallo i valori delle funzioni seno e coseno possono essere determinati  $\forall x \in \mathbf{R}$ , utilizzando banali considerazioni riguardo alla periodicità e alle simmetrie.

Siano le coppie  $(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $(c_0, c_1)$  e  $(s_0, s_1)$  tali che:

$$(1) \quad \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1, \quad c_0 = \cos \alpha_0, \quad c_1 = \cos \alpha_1, \quad s_0 = \sin \alpha_0, \quad s_1 = \sin \alpha_1.$$

Di conseguenza, le coppie  $(c_0, c_1)$  e  $(s_0, s_1)$  costituiscono gli estremi di due intervalli cui appartengono sicuramente i valori richiesti delle funzioni trigonometriche seno e coseno. Infatti, siccome  $\cos x$  è decrescente in  $[0, \pi/4]$  e  $\sin x$  è crescente in  $[0, \pi/4]$ , le equazioni in formula (1) implicano che

$$(2) \quad c_0 \geq \cos x \geq c_1 \quad \text{e} \quad s_0 \leq \sin x \leq s_1, \quad \forall 0 \leq \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1 \leq \pi/4.$$

Iterando un procedimento simile a quello della bisezione, le coppie  $(\alpha_0, \alpha_1)$ ,  $(c_0, c_1)$  e  $(s_0, s_1)$  possono essere ripetutamente modificate in modo tale che le disequazioni descritte in (2) valgano su intervalli  $[\alpha_0, \alpha_1]$ , di ampiezza via via decrescente. Tale algoritmo di bisezione può essere descritto come segue:

- (a) inizialmente, si ponga  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = \pi/4$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = \sqrt{2}/2$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = \sqrt{2}/2$ ;
- (b) **mentre** è verificata la condizione  $\alpha_1 - \alpha_0 > \varepsilon$  (dove  $\varepsilon > 0$  è un valore fissato che assume il significato di *errore di tolleranza*) si effettuano le operazioni descritte ai seguenti punti (b1)–(b6);
  - (b1) si ponga  $\alpha_\star = (\alpha_0 + \alpha_1)/2$ ;
  - (b2) si ponga  $c_+ = c_0 c_1 - s_0 s_1$  (perché, così facendo,  $c_+ = \cos(\alpha_0 + \alpha_1)$ );
  - (b3) si ponga  $c_\star = \sqrt{(1 + c_+)/2}$  (per la formula di bisezione del coseno, quest'ultima equazione implica che  $c_\star = \cos[(\alpha_0 + \alpha_1)/2]$ );
  - (b4) si ponga  $s_\star = \sqrt{(1 - c_+)/2}$  (per la formula di bisezione del seno, quest'ultima equazione implica che  $s_\star = \sin[(\alpha_0 + \alpha_1)/2]$ );
  - (b5) **se**  $x \leq \alpha_\star$  allora *si ridefiniscano gli estremi destri degli intervalli*, in modo tale che  $\alpha_1 = \alpha_\star$ ,  $c_1 = c_\star$ ,  $s_1 = s_\star$ ;
  - (b6) **altrimenti** (cioè quando  $x > \alpha_\star$ ) *si ridefiniscano gli estremi sinistri degli intervalli*, in modo tale che  $\alpha_0 = \alpha_\star$ ,  $c_0 = c_\star$ ,  $s_0 = s_\star$ ;

Dopo aver iterato la procedura descritta in precedenza fino a quando otteniamo che  $\alpha_1 - \alpha_0 \leq \varepsilon$ , possiamo utilizzare una delle due approssimazioni così costruite per calcolare  $\cos x$  e  $\sin x$  grazie a un'espansione in serie. Fondamentalmente, si tratta di utilizzare la ben nota

formula di Taylor:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dx^j}(\bar{x}) (x - \bar{x})^j .$$

All'interno di quest'ultima, dopo aver posto  $\bar{c} = \cos \bar{x}$  e  $\bar{s} = \sin \bar{x}$ , l'espressione della derivata  $j$ -esima della funzione  $f$  può essere scritta esplicitamente come segue:

$$(4) \quad \text{se } f(x) = \cos x, \quad \text{allora } \frac{d^j f}{dx^j}(\bar{x}) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} \bar{c} & \text{quando } j \text{ è pari} \\ (-1)^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} \bar{s} & \text{quando } j \text{ è dispari} \end{cases} ;$$

$$(5) \quad \text{se } f(x) = \sin x, \quad \text{allora } \frac{d^j f}{dx^j}(\bar{x}) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor} \bar{s} & \text{quando } j \text{ è pari} \\ (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor} \bar{c} & \text{quando } j \text{ è dispari} \end{cases} .$$

Si ricordi che  $\lfloor \beta \rfloor$  significa semplicemente “il massimo numero intero minore o uguale a  $\beta$ ” per ogni  $\beta \in \mathbf{R}$ .

L'algoritmo di calcolo delle funzioni trigonometriche può essere completato come descritto qui di seguito:

- (c) **se**  $x - \alpha_0 \leq \alpha_1 - x$  allora si ponga  $\bar{x} = \alpha_0$ ,  $\bar{c} = c_0$ ,  $\bar{s} = s_0$ ; **altrimenti** si ponga  $\bar{x} = \alpha_1$ ,  $\bar{c} = c_1$ ,  $\bar{s} = s_1$ ;
- (d) si definiscano i valori iniziali di  $\kappa$  e  $\sigma$  in modo tale che  $\kappa = \bar{c}$  e  $\sigma = \bar{s}$ ; inoltre, si ponga il contatore  $j = 0$ ;
- (e) si iterino le istruzioni descritte ai seguenti punti (e1)–(e4) in modo tale da costituire un ciclo, la condizione di permanenza all'interno del quale è descritta al punto (f);
  - (e1) si ponga  $\kappa_v = \kappa$  e  $\sigma_v = \sigma$ ;
  - (e2) si incrementi di 1 il valore del contatore  $j$ ;
  - (e3) si incrementi il valore di  $\kappa$  della quantità uguale al  $j$ -esimo termine della serie di Taylor (3), dove l'espressione della derivata  $j$ -esima è data nella formula (4);
  - (e4) si incrementi il valore di  $\sigma$  della quantità uguale al  $j$ -esimo termine della serie di Taylor (3), dove l'espressione della derivata  $j$ -esima è data nella formula (5);
- (f) **se**  $\kappa \neq \kappa_v$  **oppure**  $\sigma \neq \sigma_v$  si ripeta l'esecuzione delle istruzioni descritte ai precedenti punti (e1)–(e4).

Ovviamente, alla fine dell'esecuzione della procedura riassunta dai punti (c)–(f), i valori di  $\kappa$  e  $\sigma$  saranno, rispettivamente, delle (ottime) approssimazioni di  $\cos x$  e  $\sin x$ .

Si osservi che l'algoritmo appena descritto *verrà eseguito un numero finito di volte*, se implementato al calcolatore, perché *l'insieme dei numeri rappresentabili sul computer è a sua volta di cardinalità finita*. Inoltre, durante l'esecuzione di tutte le istruzioni descritte ai punti (a)–(f), *non si richiede mai di effettuare il calcolo di seno e / o coseno*; pertanto, questo metodo permette il calcolo esatto (a meno degli inevitabili errori numerici compiuti dal calcolatore) dei valori delle funzioni trigonometriche, in modo che vengano utilizzate le sole operazioni aritmetiche fondamentali e la radice quadrata.

### Obiettivo (intermedio) 1:

si scriva un programma in linguaggio **C** che effettua *una sola iterazione* della parte iniziale dell'algoritmo di calcolo delle funzioni trigonometriche. Il programma deve contenere:

- (A) una *function* che ha come argomenti il valore della variabile  $x$  e i tre *vettori* bidimensionali  $\alpha$ ,  $c$  e  $s$ ; tale *function* dovrà aggiornare i valori delle componenti di  $\alpha$ ,  $c$  e  $s$  così come descritto ai punti (b1)–(b6);
- (B) la *main function* che deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
  - (B1) l'*input* della variabile  $x$ , il cui valore deve essere compreso tra 0 e  $\pi/4$ ;
  - (B2) le definizioni iniziali dei valori delle componenti di  $\alpha$ ,  $c$  e  $s$  in accordo a quanto descritto al punto (a);
  - (B3) la *chiamata della function* descritta al punto (A);
  - (B4) la stampa sul video dei valori delle componenti di  $c$  e  $s$ , all'interno di un messaggio simile a quello seguente (dove, ad esempio, è stato posto  $x = \pi/6$ ):

```
Siano c = cos(x) e s = sin(x), allora
0.923880 >= c = 0.866025 >= 0.707107 e
0.382683 <= s = 0.500000 <= 0.707107
```

### Un primo consiglio

È sicuramente opportuno stabilire il valore *costante* di  $\pi/4$ , per mezzo di una direttiva `#define`.

### Obiettivo (intermedio) 2:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da completare l'esecuzione della parte iniziale dell'algoritmo di calcolo delle funzioni trigonometriche. A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha come argomenti i valori delle variabili  $x$ ,  $\varepsilon$  e i tre *vettori* bidimensionali  $\alpha$ ,  $c$  e  $s$ ; tale *function* inizialmente procede a definire i valori delle componenti di  $\alpha$ ,  $c$  e  $s$  in accordo a quanto descritto al punto (a); successivamente, essa *richiama ripetutamente* la *function* descritta al punto (A) dell'obiettivo 1, all'interno di un *ciclo soggetto alla condizione di permanenza* descritta al punto (b).
- (B) si modifichi la *main function* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
  - (B1) la *chiamata della function* descritta al punto (A), dopo che il valore di  $\varepsilon$  è stato posto uguale a  $10^{-5}$ ;
  - (B2) la stampa sul video dei nuovi (e più accurati) valori delle componenti di  $c$  e  $s$ , all'interno di un messaggio simile a quello riportato a modo di esempio nel punto (B4) dell'obiettivo 1.

### Obiettivo (intermedio) 3:

si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da completare il calcolo delle funzioni trigonometriche. A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si scriva una *function* che ha come argomenti le variabili  $x$ ,  $\kappa$  e  $\sigma$  (si tenga presente che i valori di  $\kappa$  e  $\sigma$  **devono** essere modificati all'interno di questa stessa *function*); tale *function* deve essere strutturata in modo tale che, a sua volta, essa contenga:
  - (A1) la *chiamata della function* descritta al punto (A) dell'obiettivo 2;
  - (A2) la traduzione in linguaggio di programmazione della procedura descritta ai punti (c)–(f);
- (B) si modifichi la *main function* in modo tale che, a sua volta, essa contenga:

- (B1) la *chiamata della function descritta al punto (A)*;
- (B2) la stampa dei valori così calcolati di  $\cos x$ ,  $\sin x$  e le rispettive differenze (in valore assoluto e *in formato esponenziale*) rispetto ai valori forniti dalle corrispondenti *function incluse nelle librerie del compilatore C*.

### Un secondo consiglio

È sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle *functions* o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete). A partire da una di queste *functions*, il conseguimento dell'obiettivo 3 dovrebbe essere particolarmente agevole, purché si inseriscano le opportune modifiche a questa parte del programma.

### Obiettivo (intermedio) 4:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la scrittura ordinata su **file** di una successione di coppie di valori di  $x_i$  e  $\cos^2 x_i - \sin^2 x_i + 2 \sin x_i \cos x_i$ , a partire dalla quale è possibile tracciare il grafico della funzione  $x \mapsto \cos(2x) + \sin(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$ . A tal fine si può procedere come segue:

- (A) si esegua un ciclo all'interno del quale il valore dell'angolo  $x$  assume tutti i valori appartenenti all'insieme  $\{i\pi/(4 \cdot 1000)\}_{i=0}^{1000}$  e si calcoli il corrispondente valore di  $\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$ , utilizzando la *function* richiesta dall'obiettivo 3;
- (B) all'interno del suddetto ciclo si proceda alla stampa su **file**, in modo tale che su ciascuna delle sue righe compaia prima il valore di  $x$  e poi quello corrispondente di  $\cos(2x) + \sin(2x)$ .
- (C) si aggiungano le istruzioni necessarie (fuori e dentro al ciclo richiesto al punto (A)) al fine di *visualizzare sullo schermo la massima differenza* (in valore assoluto e *in formato esponenziale*) tra i valori ottenuti di  $\cos^2 x_i - \sin^2 x_i + 2 \sin x_i \cos x_i$  e quelli che vengono prodotti calcolando  $\cos(2x_i) + \sin(2x_i)$ , in modo da utilizzare le *function incluse nelle librerie del compilatore C*. Ovviamente, si intende che la massima differenza viene determinata rispetto a tutti gli  $x_i \in \{i\pi/(4 \cdot 1000)\}_{i=0}^{1000}$ .

### Obiettivo (finale) 5:

si scriva un **file** contenente i comandi necessari al software **gnuplot**, al fine di far apparire sullo schermo un grafico (esteticamente apprezzabile) della funzione  $x \mapsto \cos(2x) + \sin(2x)$ , in modo tale che il suddetto grafico sia tracciato a partire dai dati scritti nel **file** richiesto dall'obiettivo 4.