Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
25 Giugno 2008

Tema d'esame: Calcolo degli autovalori di una matrice reale simmetrica di dimensione 4×4, tale che i suoi elementi al di fuori della diagonale principale sono così piccoli rispetto a quelli sulla diagonale che ogni suo autovalore giace all'interno di un solo disco di Gershgorin.

Descrizione del metodo di calcolo

Si consideri una matrice $n \times n$–dimensionale A che sia reale e simmetrica. $\forall\, 0 \le i < n$, $0 \le j < n$, si indichi con $a_{i,j}$ il generico elemento appartenente alla matrice A.
Siano i vettori $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$, $\{d_i\}_{i=0}^{n-1}$ e $\{R_i\}_{i=0}^{n-1}$ definiti come segue:

(1) $$R_i = \sum_{\substack{0 \le j < n \\ j \ne i}} |a_{i,j}| \ , \qquad c_i = a_{i,i} - R_i \ , \qquad d_i = a_{i,i} + R_i \ .$$

Inoltre, si supponga che tutti gli insiemi del tipo $[c_i\,,\,d_i]$ siano disgiunti tra loro, cioè

(2) $$[c_i\,,\,d_i] \cap [c_j\,,\,d_j] = \emptyset \qquad \forall\ i \ne j\ ;$$

allora, tenendo conto del fatto che gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$ di A sono reali (poiché A è reale e simmetrica), il secondo teorema di Gershgorin implica che

(3) $$\lambda_i \in [c_i\,,\,d_i] \qquad \forall\ i = 0, \ldots, n-1\ .$$

Sia

(4) $$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

il polinomio caratteristico della matrice A, allora la formula (3) assicura che ciascuno degli autovalori λ_i può essere determinato applicando il metodo di bisezione alla funzione f nell'intervallo $[c_i\,,\,d_i]$.

Per completezza, si riportano le espressioni che consentono di determinare ciascuno dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico, nel caso particolare con $n = 4$:

(5) $$\alpha_0 = \det A\,,\quad \alpha_1 = -\sum_{i=0}^{3} \det M_i\,,\quad \alpha_2 = \sum_{0 \le i \le j < 3} \det \mathcal{M}_{i,j}\,,\quad \alpha_3 = -\sum_{i=0}^{3} a_{i,i}\,,\quad \alpha_4 = 1\,,$$

dove M_i è la matrice 3×3–dimensionale che si ottiene togliendo ad A la i–esima riga e la i–esima colonna; mentre, $\mathcal{M}_{i,j}$ è la matrice 2×2–dimensionale che si ottiene togliendo ad M_i la j–esima riga e la j–esima colonna.

Infine, si supponga che sia nota la matrice U tale che ciascuna sua i–esima colonna è costituita dall'autovettore relativo a λ_i, allora sussiste l'uguaglianza

(6) $$U^T A U - \mathrm{diag}(\lambda_0\,, \ldots, \lambda_{n-1}) = 0\ ,$$

dove $\mathrm{diag}(\lambda_0\,, \ldots, \lambda_{n-1})$ è la matrice $n \times n$–dimensionale i cui elementi sulla diagonale sono appunto $\lambda_0\,, \ldots, \lambda_{n-1}$, mentre tutti gli altri elementi sono nulli.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola gli estremi degli intervalli cui appartengono gli autovalori di una particolare matrice A, alla quale si applicano tutte le ipotesi descritte in precedenza. Il programma deve contenere:
(a) la definizione della matrice A *(si consiglia di* **non** *effettuare l'"input da tastiera")*, i cui elementi sono tali che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.3 & -0.1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

(b) una *function* che ha come argomenti una matrice A e due vettori $\underline{c}$ e $\underline{d}$; essa, al suo interno, deve procedere al calcolo degli elementi dei vettori $\underline{c}$ e $\underline{d}$, che sono definiti dalle equazioni presenti in (1);
(c) la *chiamata della function descritta al punto (b)*;
(d) la stampa (ordinata) sul video dei valori degli elementi dei vettori $\underline{c}$ e $\underline{d}$.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ che compaiono nella definizione del polinomio caratteristico della matrice A. A tal fine si può procedere come segue:
(a) si includano nel programma tutte le functions che sono necessarie per il calcolo del determinante di una matrice;
(b) si scriva una function che ha come argomenti una matrice `mat1`, due interi n e l, un'altra matrice `mat2`; all'interno di tale function gli elementi di `mat1` che hanno indici di riga e di colonna compresi tra 0 e $n-1$ vengano "ricopiati" sugli elementi di `mat2`, *ad eccezione di quelli che stanno sulla l–esima riga* **oppure** *sulla l–esima colonna*;
(c) si proceda al calcolo dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ così come sono definiti dalle equazioni in (5); si noti che la function descritta al punto (b) dovrà essere chiamata una volta per poter determinare le matrici M_i e due volte (una di seguito all'altra) per $\mathcal{M}_{i,j}$;
(d) si stampino (in modo ordinato) sul video i valori dei coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$.

Alcuni consigli
Sia per quanto riguarda l'obiettivo 2 che i seguenti, è sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle funzioni o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

In particolare, per **tutte** le matrici utilizzate nel programma, si consiglia di allocare sempre `NDIM`×`NDIM` celle di memoria, tenendo presente che gli elementi di matrice effettivamente utilizzati sono quelli corrispondenti ad indici di riga o di colonna compresi tra 0 e $n-1$, dove n è la *dimensione effettiva* della matrice utilizzata. Ovviamente, il parametro `NDIM` deve essere definito da un'opportuna direttiva `#define`.

Per semplificare la scrittura del seguente obiettivo 3, si consiglia di definire i coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ come variabili di tipo *globale*. In altre parole, è bene che l'allocazione di memoria relativa ai coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n}$ sia precedente al *main* e a tutte le altre functions.

Obiettivo (intermedio) 3:
si effettui il calcolo degli autovalori della matrice A. Per raggiungere tale scopo, al programma richiesto dall'obiettivo 2 si aggiunga quanto segue:
(a) si includa nel programma una function che permette di risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$, utilizzando il metodo di *bisezione*;
(b) si scriva una function che per ogni dato numero x restituisce il valore di $f(x)$ così com'è definito in (4);
(c) $\forall\ i = 0, \ldots, 3$, si effettui la chiamata alla function descritta al punto (a), in modo che la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ venga ricercata nell'intervallo $[c_i\,, d_i]$;
(d) si stampino (in modo ordinato) sul video i valori ottenuti degli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$.

Obiettivo (finale) 4:
si controlli la correttezza del calcolo degli autovalori effettuato in precedenza. Per raggiungere tale scopo, al programma richiesto dall'obiettivo 3 si aggiunga quanto segue:
(a) si leggano dal file `gersh2autoval.inp` (che è reperibile in rete) tutti gli elementi della matrice U, le cui colonne sono costituite dagli autovettori di A; il suddetto file è strutturato in modo tale che nelle sue prime quattro linee sono scritti i valori degli elementi della prima riga di U, nelle linee che vanno dalla quinta all'ottava ci sono i valori della seconda riga di U, etc.;
(b) si effettui il calcolo della matrice $D = U^T A U - \mathrm{diag}(\lambda_0\,, \ldots, \lambda_3)$;
(c) si determini il massimo dei valori assoluti degli elementi della suddetta matrice D;
(d) si stampi sul video la quantità descritta al punto (c) *in formato esponenziale*; ovviamente, l'equazione (6) si intende verificata se il valore stampato *è piccolo quasi quanto l'errore di macchina.*