Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
12 Settembre 2008

Tema d'esame: Calcolo dei coefficienti di Laplace al fine di poter valutare (per mezzo di un'espansione in serie) l'espressione della funzione perturbatrice, la quale appare in molti problemi di meccanica celeste.

Descrizione del metodo di calcolo

Introduciamo il simbolo $\big(\alpha\big)_n$, il cui valore, $\forall\ \alpha\ \in\ \mathbf{R}$, $n\ \in\ \mathbf{N}$, è dato dalla seguente equazione:

$$(1)\qquad \big(\alpha\big)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + j) \ .$$

Qualora non fosse ovvio dalla formula precedente, precisiamo che $\big(\alpha\big)_0\ =\ 1\ \forall\ \alpha\ \in\ \mathbf{R}$. Inoltre, si osservi che la definizione (1) rappresenta una generalizzazione del fattoriale, poiché sussiste l'uguaglianza $\big(1\big)_n\ =\ n!\ \ \forall\ n\ \ge\ 0$. Il simbolo $\big(\alpha\big)_n$ talora permette di scrivere (e di calcolare) in modo molto semplice alcuni sviluppi in serie elementari, ad esempio

$$(2)\qquad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{4} \left[(-1)^{n+1} \frac{\big(0.5\big)_n}{\big(1\big)_n}\, x^n \right] + o(x^4) \ .$$

I coefficienti di Laplace $\beta_{j;\sigma}(\varrho)$ sono abitualmente definiti per ogni coppia di indici $j \in \mathbf{N}$, σ semi-intero positivo (ovvero, $\sigma = \frac{1}{2}\,,\ 1\,,\ \frac{3}{2}\,,\ 2\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \ldots$) e quando è verificato che $-1 < \varrho < 1$. Il loro valore si può calcolare grazie alla formula seguente:

$$(3)\qquad \beta_{j;\sigma}(\varrho) = \begin{cases} F\left(\sigma, \sigma, 1; \varrho^2\right) & \text{se } j = 0 \\ 2\dfrac{\big(\sigma\big)_j}{\big(1\big)_j}\, \varrho^j\, F\left(\sigma, \sigma+j, j+1; \varrho^2\right) & \text{se } j > 0 \end{cases} \ ,$$

dove compare la funzione ipergeometrica confluente $F = F(a, b, c; x)$, la cui definizione è

$$(4)\qquad F(a,b,c;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\big(a\big)_m \big(b\big)_m}{\big(c\big)_m \big(1\big)_m}\, x^m \right] \ ;$$

dall'equazione precedente si deduce che il raggio di convergenza della serie rispetto a x è uguale a 1 , quindi $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times B_1(0) \mapsto \mathbf{R}$.

Siano s un intero positivo e la funzione Δ definita come segue

$$(5)\qquad \Delta = \sqrt{1 + \varrho^2 - 2\varrho\cos\lambda} \ .$$

Dopo aver posto $\sigma = s/2$, si può scrivere la seguente formula notevole

$$(6)\qquad \Delta^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\beta_{j;\sigma}(\varrho)\, \cos(j\lambda) \right] \ ,$$

che permette di espandere in serie la funzione perturbatrice della meccanica celeste.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che utilizza la "generalizzazione del fattoriale" al fine di calcolare i coefficienti di un'espansione in serie di potenze elementare, come quella in formula (2). Il programma deve contenere:

(a) una *function* che ha come argomento le due variabili α e n; essa ha come unico scopo quello di restituire il valore di $\big(\alpha\big)_n$ (quanto al metodo di calcolo, si presti attenzione al consiglio riportato nel seguito);

(b) la stampa sul video (*che deve essere effettuata all'interno del* `main`) dell'espansione in serie troncata che compare nella formula (2); tale stampa deve essere simile a quanto segue

```
sqrt(1 + x) = 1 + 0.500000 * x − 0.375000 * x^2 + 0.312500 * x^3
                − 0.273438 * x^4 + o(x^4) ,
```

dove ciascuno dei coefficienti dei termini di grado 1, 2, 3, 4 in x è calcolato tramite una *chiamata della function descritta al punto (a).*

Un consiglio
Si **eviti** di adottare la *ricorsione* nella scrittura della *function descritta al punto (a)* precedente. Infatti, al fine di effettuare i calcoli richiesti dagli obiettivi seguenti, tale *function* deve essere chiamata molte volte; l'adozione del metodo *ricorsivo* può quindi comportare un notevole aumento del tempo di esecuzione richiesto dal programma.

Obiettivo (intermedio) 2:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da aggiungere il calcolo della funzione ipergeometrica confluente. A tal fine si può procedere come segue:

(a) si scriva una *function* che ha come argomenti i valori di a, b, c, x e restituisce come risultato il valore di $F(a, b, c; x)$; tale *function* deve continuare ad aggiungere un addendo alla sommatoria che definisce il risultato, *mentre* è verificata la condizione

$$\left| \frac{\big(a\big)_m \big(b\big)_m}{\big(c\big)_m \big(1\big)_m} x^m \right| > 2 \times 10^{-16} \ ;$$

in altri termini, la sommatoria viene eseguita fino a quando il termine generale della serie (cioè l'espressione che compare sia tra parentesi quadre in (4) che nel membro di sinistra della disequazione precedente) diventa più piccolo dell'*errore di macchina.*

(b) *all'interno del* `main`, si effettui l'*input da tastiera* dei valori delle variabili a, b, c, x;

(c) si stampi sul video il corrispondente valore della funzione ipergeometrica confluente, calcolato grazie a una *chiamata della function descritta al punto (a)*; al fine di controllare la correttezza dei risultati, si effettui il confronto con i valori (approssimati) seguenti:

$$F(0.5\,,\,1.5\,,\,1\,;\,0.6) \,=\, 2.066512 \ , \qquad F(0.5\,,\,2.5\,,\,2\,;\,0.5) \,=\, 1.573787 \ .$$

Obiettivo (intermedio) 3:
si integri il programma richiesto dall'obiettivo 2, in modo tale da poter effettuare il calcolo

dell'espressione Δ^{-s} tramite l'espansione in serie che compare in formula (6) e si verifichi *numericamente* che tale equazione è corretta. A tal fine si proceda come segue:

(a) si scriva una *function* che ha come argomenti i valori di j , σ , ϱ e restituisce come risultato il valore del coefficiente di Laplace $\beta_{j;\sigma}(\varrho)$, che è definito in (3);

(b) si scriva una *function* che ha come argomenti i valori di s , ϱ , λ e restituisce come risultato il valore di Δ^{-s} calcolato grazie all'espansione in serie che compare nel membro di destra della formula (6); all'interno di tale *function* si raccomanda di

(b1) porre $\sigma = s/2$;

(b2) continuare ad aggiungere un addendo alla sommatoria che definisce il risultato, *mentre* è verificata la condizione

$$|\beta_{j;\sigma}(\varrho)| > 2 \times 10^{-16} \ ,$$

dove, ovviamente, il valore del coefficiente di Laplace $\beta_{j;\sigma}(\varrho)$ viene calcolato grazie a una *chiamata della function descritta al punto (a)*;

(c) *all'interno del* `main`, si effettui l'*input da tastiera* dei valori delle variabili s , ϱ , λ , che **devono** essere soggetti alle seguenti limitazioni [*] :

$$0 < s \leq 10 \ , \qquad 0 \leq \varrho \leq 0.7 \ , \qquad 0 \leq \lambda < 2\pi \ ;$$

(d) sempre *all'interno del* `main`, si proceda alla *chiamata della function descritta al punto (b)* e si effettui il confronto con il valore di Δ^{-s} calcolato utilizzando la definizione (5); si stampi sul video *in formato esponenziale* il valore assoluto della differenza dei due valori calcolati di Δ^{-s}.

Obiettivo (finale) 4:

al programma richiesto dagli obiettivi precedenti si aggiunga la "verifica numerica automatica" della correttezza dell'equazione (6), utilizzando opportunamente le successioni di numeri pseudocasuali. A tal fine si proceda come segue:

(a) *All'interno del* `main`, si scriva un ciclo nel quale la variabile s assume i valori 1 , 3 , 5 , 7 , 9 ; tale ciclo deve contenere:

(b1) la definizione in modo pseudocasuale di 100 coppie di valori delle variabili ϱ e λ in modo tale che $\varrho \in [0, 0.7]$ e $\lambda \in [0, 2\pi)$;

(b2) il confronto tra i valori calcolati di Δ^{-s} così come descritto nell'obbiettivo 3, ma a proposito di ciascuno dei valori s , ϱ , λ definiti come ai punti *(a)* e *(b1)* e **non** di quelli precedentemente introdotti da tastiera;

---

[*] Si osservi che tali limitazioni sono molto più restrittive di quelle discusse nel metodo di calcolo all'inizio del testo. Ciò è dovuto al fatto che l'algoritmo qui descritto richiede il calcolo di quantità intermedie che diventano estremamente grandi al crescere dell'indice delle serie (in particolare, si osservi che sia a numeratore che a denominatore del termine generale della serie in (4) compare un prodotto i cui due fattori sono $\mathcal{O}(m!)$). Pertanto, se il calcolo delle serie che compaioni in (4) e (6) non viene troncato rapidamente, possono verificarsi degli errori di *overflow*. Le limitazioni su s e, in particolare, su ϱ sono state studiate in modo tale da permettere una convergenza abbastanza rapida da evitare tali errori.

(b3) (per ogni fissato s) il calcolo della massima differenza (in valore assoluto) che si registra nei confronti dei valori di Δ^{-s}, rispetto a tutte e 100 le coppie di valori pseudocasuali delle variabili ϱ e λ;

(b4) (per ogni fissato s) la stampa sul video *in formato esponenziale* della differenza massima descritta al punto *(b3)*.