Prova d'esame di Laboratorio di Calcolo I
per il corso di laurea in Matematica
4 Giugno 2007

Tema d'esame: Calcolo degli autovalori di una matrice di dimensione $3x3$, tale che l'autovalore massimo (in valore assoluto) può essere determinato utilizzando il metodo delle potenze.

Obiettivo (intermedio) 1:
si scriva un programma in linguaggio **C** che calcola alcune quantità di interesse per l'applicazione del metodo delle potenze. Il programma deve contenere:

(a) la definizione della matrice A *(si sconsiglia di effettuare l'"input da tastiera")* e del vettore $\underline{v} \in \mathbf{R}^3$, i cui elementi sono rispettivamente tali che

$$A = \begin{pmatrix} 2.50 & -0.79 & -1.19 \\ -0.79 & -0.35 & 0.01 \\ -1.19 & 0.01 & -1.65 \end{pmatrix} , \qquad \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \tag{1}$$

(b) una funzione che dati (come argomenti della funzione stessa) una matrice B e un vettore $\underline{u}$, restituisce il vettore $\underline{z}$ tale che $\underline{z} = B\underline{u}$ (dove s'intende che il prodotto viene effettuato con la regola "riga per colonna", che è usuale in algebra lineare);

(c) il calcolo del vettore $\underline{w} \in \mathbf{R}^3$ e del numero $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ rispettivamente tali che

$$\underline{w} = A\underline{v} , \qquad \lambda_1 = \underline{v} \cdot \underline{w} , \tag{2}$$

dove A e v sono definiti come in (1) e, per la determinazione di $\underline{w}$, *si deve utilizzare la funzione descritta al punto (b)*;

(d) la stampa (ordinata) sul video dei valori di $\underline{w}$ e λ_1 .

Alcuni consigli
Sia per quanto riguarda l'obiettivo 1 che i seguenti, è sicuramente comodo (e *prudente*) utilizzare delle funzioni o parti di programma, che sono incluse in altri programmi precedentemente scritti dagli studenti stessi o dal docente (e reperibili in rete).

Obiettivo (intermedio) 2:
si modifichi il programma richiesto dall'obiettivo 1, in modo tale da calcolare l'autovalore λ_1 , che è il massimo (in valore assoluto) tra quelli della matrice A . Ciò può essere fatto utilizzando il metodo delle potenze come segue:

(a) si mantengano la definizione della matrice A e quella iniziale del vettore $\underline{v}$ come descritto al punto (a) dell'obiettivo 1;

(b) si definisca inizialmente $\lambda_1 = 0$;

(c) si ripetano le operazioni (d)–(g) seguenti che sono soggette alla condizione di iterazione espressa al punto (h);

   (d) si ponga $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1$;

   (e) si calcolino i valori *attuali* di $\underline{w}$ e λ_1 , come prescritto dalla formula (2);

(f) si calcoli la norma euclidea $\|\underline{w}\|$, cioè

$$\|\underline{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} w_i^2} \quad ;$$

(g) si ridefinisca il vettore $\underline{v}$ in modo tale che

$$\underline{v} = \frac{w}{\|\underline{w}\|} \quad ;$$

(h) se l'errore relativo sull'approssimazione di λ_1 non è quasi dell'ordine di grandezza dell'errore di macchina, cioè se si verifica che

$$\left| \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_1} \right| > 10^{-15} \ ,$$

allora si torni a ripetere le suddette operazioni (d)–(g);

(i) si stampi su video l'approssimazione finale di λ_1 , così ottenuta.

Obiettivo (intermedio) 3:
si completi il calcolo degli autovalori della matrice A , procedendo come descritto in seguito. Si tenga presente che il polinomio caratteristico P , associato alla matrice A , soddisfa l'equazione

$$P(x) = (\lambda_1 - x) \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) \ ,$$

dove

$$a = 1 \ , \quad b = \lambda_1 - \mathrm{Tr}(A) \ , \quad c = \frac{\det(A)}{\lambda_1} \ . \tag{3}$$

Conseguentemente, i rimanenti autovalori λ_2 e λ_3 altro non sono che le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Per raggiungere il suddetto scopo, al programma richiesto dall'obiettivo 2 si aggiunga quanto segue:

(a) si calcoli la traccia della matrice A (cioè $\mathrm{Tr}(A)$, ovvero la somma degli elementi che stanno sulla diagonale principale della matrice);

(b) si includa una funzione che effettua il calcolo del determinante di una matrice;

(c) si determinino i valori dei coefficienti a , b e c , in accordo alle formule descritte in (3);

(d) si stampino su video i valori di λ_2 e λ_3 (trattando opportunamente, tanto il caso in cui le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono reali, quanto quello relativo a soluzioni complesse).

Obiettivo (finale) 4:

(a) al programma richiesto dall'obiettivo 3 si aggiunga la lettura dei valori degli elementi della matrice A da un file, che deve essere strutturato in modo simile al file `met_potenze.inp` (che è reperibile in rete);

(b) si modifichi il programma richiesto dagli obiettivi precedenti, in modo tale che il calcolo e la stampa degli autovalori λ_1 , λ_2 e λ_3 siano *esclusivamente* relativi alla matrice letta dal file e non a quella definita in (1).