

Note su alcuni argomenti del corso di  
Meccanica Razionale

Giuseppe Benfatto  
Università di Roma "Tor Vergata"

# 1 Moti unidimensionali

## 1.1 Moti unidimensionali conservativi

Il sistema meccanico più semplice è quello costituito da un punto materiale che si muove su di una retta (di ascissa  $x$ ), sotto l'azione di una forza  $f(x)$  indipendente dal tempo  $t$ , di classe  $C^\infty$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Il suo moto è descritto dall'equazione differenziale:

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (1.1.1)$$

Le soluzioni di questa equazione soddisfano un'importante condizione, detta la *conservazione dell'energia*. Sia  $V(x)$  una funzione (individuata a meno di una costante) tale che  $V'(x) = -f(x)$ ; questa funzione viene chiamata *energia potenziale*. Data una funzione  $x(t)$  regolare, si definisce *energia* del moto corrispondente la funzione del tempo:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) \quad (1.1.2)$$

È facile verificare che, se  $x(t)$  è una soluzione della (1.1.1),  $E(t)$  è costante; infatti:

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} - f(x)) = 0$$

La costanza di  $E(t)$  (il cui valore indicheremo pure con  $E$  nel seguito), permette di ricavare una notevole stima a priori nel caso in cui l'energia potenziale sia inferiormente limitata.

**Proposizione 1.1.1** *Se  $V(x) \geq M$ , allora:*

$$|x(t)| \leq |x(0)| + |t|\sqrt{\frac{2}{m}(E - M)}$$

*e pertanto tutte le soluzioni sono definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Dim.** - Dalla (1.1.2) segue subito che, se  $x(t)$  è una soluzione della (1.1.1), allora, per tutti i valori di  $t$  del suo intervallo di definizione:

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \leq \sqrt{\frac{2}{m}[E - M]}$$

da cui segue facilmente l'asserto, usando la  $x(t) = x(0) + \int_0^t ds\dot{x}(s)$ . ■

Per proseguire nello studio qualitativo dell'equazione (1.1.1) è conveniente riscrivere la (1.1.1) come un sistema del primo ordine, assumendo  $v(t) = \dot{x}(t)$  come incognita, insieme a  $x(t)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}f(x) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Il sistema (1.1.3) è un sistema autonomo; pertanto per ogni punto  $(x_0, v_0)$  del piano  $(x, v)$ , detto *spazio delle fasi*, passa una ed una sola traiettoria (di cui la soluzione della (1.1.3) con condizioni iniziali  $(x_0, v_0)$  è una rappresentazione parametrica particolare). Il moto del punto materiale può essere utilmente rappresentato nello spazio delle fasi da un punto che si muove lungo la traiettoria, assumendo al tempo  $t$  la posizione  $(x(t), v(t))$ ; questo movimento deve avvenire in senso orario, in quanto  $\dot{x} = v$  (vedi la successiva Fig. 2). I punti dello spazio delle fasi saranno talora chiamati *stati* della particella.

Fra tutte le traiettorie possibili, un ruolo particolare hanno quelle costituite da un solo punto, dette *stati di equilibrio*; le soluzioni corrispondenti sono in tal caso soluzioni costanti. Gli stati di equilibrio possono essere situati esclusivamente sull'asse  $x$ ; infatti, se  $x(t)$  è costante,  $v(t) = \dot{x}(t) = 0$ . Inoltre, se  $(\bar{x}, 0)$  è uno stato di equilibrio,  $V'(\bar{x}) = 0$ .

La conservazione dell'energia implica che ogni traiettoria è interamente contenuta nel sottoinsieme dello spazio delle fasi:

$$D_E = \left\{ (x, v) : \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \right\}$$

essendo  $E$  l'energia del moto corrispondente. Di qui segue subito in particolare che, se l'insieme  $D_E$  è un insieme limitato, tutte le soluzioni di energia  $E$  sono limitate e quindi globali (cioè sono definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ). In realtà questa stessa conclusione può raggiungerai anche se il punto iniziale  $(x_0, v_0)$  appartiene ad una componente connessa limitata di  $D_E$ ; infatti la traiettoria deve necessariamente appartenere tutta a tale componente, per continuità.

Un'altra rappresentazione conveniente del moto si può ottenere associando allo stato della particella un punto del piano, in modo che ascissa e ordinata rappresentino, rispettivamente, la posizione e l'energia della particella. Si noti però che non tutti i punti del piano  $(x, E)$  sono utilizzabili per questa rappresentazione, in quanto, per ogni  $x$ , deve essere  $E \geq V(x)$ ; pertanto solo i punti al di sopra del grafico di  $V(x)$  corrispondono a stati permessi. Risulta inoltre definita una trasformazione che associa ad ogni punto dello spazio delle fasi un punto del piano  $(x, E)$ , in modo che  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ; questa trasformazione non è invertibile, in quanto ci sono due punti dello spazio delle fasi, simmetrici rispetto all'asse  $x$ , corrispondenti ad uno stesso punto del piano  $(x, E)$ .

Esaminiamo ora le diverse caratteristiche che può assumere una traiettoria, considerando un esempio particolare, quello del potenziale

$$V(x) = x^2 e^{-x}$$

il cui grafico è rappresentato in Fig. 1 come il sottoinsieme dei punti del piano  $(x, E)$ , tali che  $E = V(x)$  (cioè i punti corrispondenti all'asse  $x$  dello spazio delle fasi).

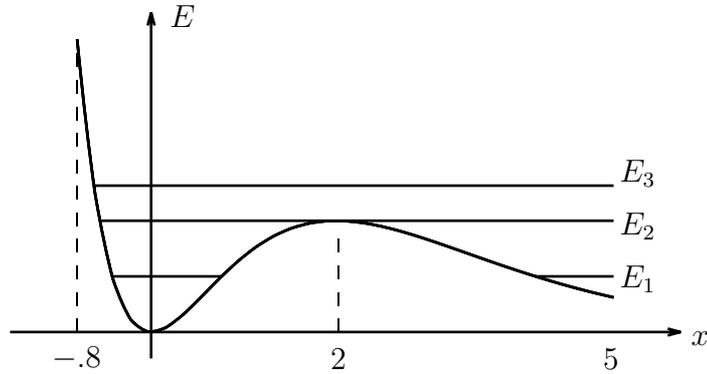


Figura 1: Esempi di traiettorie nel piano  $(x, E)$ .

Si noti che ad ogni insieme  $D_{E_0}$  dello spazio delle fasi corrisponde, nel piano  $(x, E)$ , l'intersezione della retta  $E = E_0$  con la regione  $\{(x, E) : E \geq V(x)\}$ . In Fig. 2 sono disegnati gli insiemi  $D_E$  corrispondenti a tre valori  $E_1, E_2, E_3$  dell'energia ed in Fig. 1 sono disegnate le immagini corrispondenti.

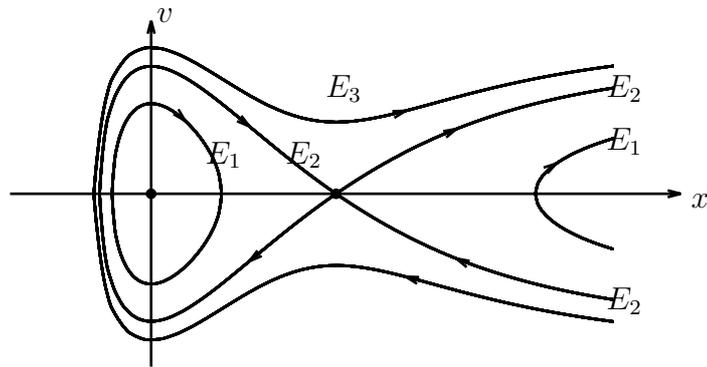


Figura 2: Esempi di traiettorie nello spazio delle fasi.

I punti  $(0, 0)$  e  $(2, 0)$  sono gli unici stati di equilibrio; le traiettorie per questi due punti coincidono pertanto con i punti stessi. Tutte le altre traiettorie sono invece delle curve regolari nello spazio delle fasi, che devono essere contenute completamente in un sottoinsieme  $D_E$ , come abbiamo già osservato. Si possono presentare solo tre casi con caratteristiche qualitativamente differenti, caratterizzati dal fatto che l'energia del moto sia minore, uguale o maggiore al valore del potenziale nel suo punto di massimo relativo,  $E_2 = V(2) = 4e^{-2}$ .

Cominciamo con il considerare il caso  $E < E_2$ ; è questa la situazione per l'energia  $E_1$  di Fig. 2. In tal caso si presentano due situazioni differenti, a

seconda che la traiettoria sia contenuta nella componente limitata di  $D_{E_1}$  o in quella illimitata, che indicheremo rispettivamente con  $D_{E_1}^1$  e  $D_{E_1}^2$ . Facciamo vedere che ambedue questi insiemi contengono una sola traiettoria.

Se la traiettoria è contenuta in  $D_{E_1}^1$ , che è un insieme limitato, l'intervallo di definizione del moto corrispondente coincide con  $\mathbb{R}$ , come abbiamo già visto. È inoltre facile vedere che la traiettoria coincide necessariamente con  $D_{E_1}^1$ . Infatti, se così non fosse, esisterebbe un punto  $(\bar{x}, \bar{v})$  appartenente a  $D_{E_1}^1$  ma non alla traiettoria, tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), v(t)) = (\bar{x}, \bar{v})$ . Ciò è tuttavia impossibile, in quanto la traiettoria corrispondente alla soluzione con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v})$ , non potendo coincidere con  $(\bar{x}, \bar{v})$  (su  $D_{E_1}^1$  non ci sono stati di equilibrio), deve contenere  $(\bar{x}, \bar{v})$  al suo interno e deve pertanto intersecare la traiettoria precedente.

Il ragionamento precedente implica anche che la curva chiusa  $D_{E_1}^1$  è percorsa completamente in un tempo finito; la soluzione della (1.1.3) è pertanto una soluzione periodica.

Passiamo a considerare il caso  $E = E_2$ . Ora l'insieme  $D_{E_2}$  contiene uno stato di equilibrio ed è facile rendersi conto, con argomenti simili a quelli usati precedentemente, che tale insieme contiene, oltre lo stato di equilibrio, tre altre traiettorie (vedi Fig. 2). La prima di queste traiettorie descrive un moto limitato, che si svolge nell'intervallo  $(x_-, 2)$ , essendo  $x_-$  il valore negativo di  $x$  tale che  $V(x) = E_2$ ; la traiettoria tende al punto  $(2, 0)$  sia per  $t \rightarrow +\infty$  che per  $t \rightarrow -\infty$ . Le altre due traiettorie descrivono due moti illimitati che si svolgono nell'intervallo  $(2, +\infty)$ ; quella situata nel semipiano  $v > 0$  tende al punto  $(2, 0)$  per  $t \rightarrow -\infty$ , mentre l'altra tende verso lo stesso punto per  $t \rightarrow +\infty$ .

Anche il caso  $E = E_3$  si analizza con lo stesso tipo di argomenti e si arriva alla conclusione che  $D_{E_3}$  contiene una sola traiettoria, corrispondente ad un moto  $x(t)$  che tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , la cui velocità cambia segno nell'unico punto  $\bar{x}$  tale che  $V(\bar{x}) = E_3$ .

La traiettoria limitata di energia  $E_2$  è un esempio di *separatrice*, cioè di una traiettoria che separa una regione dello spazio delle fasi in cui i moti sono periodici da un'altra in cui ciò non è vero.

La conservazione dell'energia permette di ottenere in modo molto semplice anche informazioni quantitative sulle soluzioni della (1.1.1). Basta osservare che la (1.1.2) può risolversi rispetto a  $\dot{x}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \quad (1.1.4)$$

dove va scelto il segno  $+$  nei tratti di traiettoria contenuti nel semipiano  $v \geq 0$ , il segno  $-$  altrimenti. Pertanto, in ogni intervallo di tempo corrispondente a tratti di traiettoria con segno costante di  $v(t)$  si può integrare la (1.1.4) per separazione delle variabili.

Consideriamo, per esempio, la traiettoria periodica di energia  $E_1$ , indichiamo con  $x_-$  e  $x_+$  le sue intersezioni con l'asse  $x$  e supponiamo che l'origine dei tempi (la si può fissare arbitrariamente, perchè il sistema (1.1.3) è autonomo) sia scelta così che  $x(0) = x_-$ . Allora, detto  $T_+$  il tempo necessario a percorrere il tratto di traiettoria situato nel semipiano superiore, si ha, se  $t \leq T_+$ :

$$\int_{x_-}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t \quad (1.1.5)$$

Poiché l'integrale a primo membro della (1.1.5) è una funzione crescente del suo estremo superiore, la (1.1.5) è certamente solubile rispetto a  $x(t)$ , che quindi è definita implicitamente in tutto l'intervallo  $[0, T_+]$ . In modo analogo si ottiene la soluzione corrispondente al tratto di traiettoria situato nel semipiano inferiore, definita per  $t \in [T_+, T]$ , dove  $T$  è il periodo del moto; si ha:

$$\int_{x(t)}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - T_+ \quad (1.1.6)$$

La (1.1.5) e la (1.1.6) implicano immediatamente che i tempi di percorrenza dei due tratti di traiettoria sono eguali e che il periodo del moto è dato dall'espressione:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \quad (1.1.7)$$

## 1.2 Isocronismo delle piccole oscillazioni e stime del periodo

Se  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + bx + c$ , con  $k > 0$ , la (1.1.7) permette di calcolare esplicitamente  $T$  ed il risultato dipende solo da  $k$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.2.1)$$

Ritroviamo così il risultato ben noto che tutti i moti unidimensionali che si svolgono sotto la sola azione di una forza di richiamo elastica sono periodici, di un periodo che non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.

Questa osservazione suggerisce delle stime molto semplici, anche se in generale molto grossolane, di  $T$ .

Supponiamo di aver trovato due polinomi di secondo grado  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  tali che (vedi Fig. 3):

$$\begin{aligned} V_1(x) &\leq V(x) \leq V_2(x) & x_- \leq x \leq x_+ \\ V_1(x_{\pm}) &= V(x_{\pm}) = V_2(x_{\pm}) = E \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

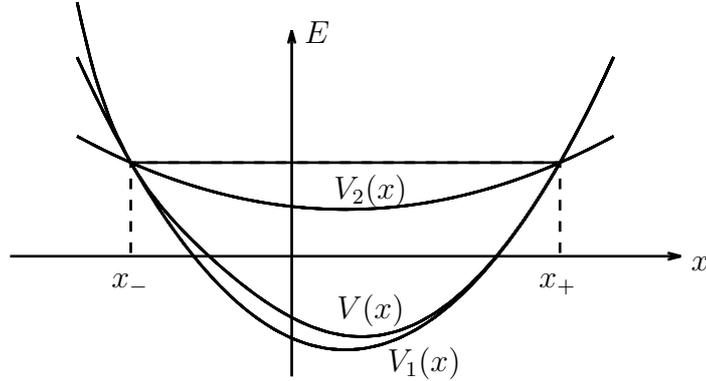


Figura 3: Rappresentazione grafica delle relazioni (1.2.2).

Allora:

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = T_1 \leq T \leq T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad (1.2.3)$$

$$k_i = V_i'' \quad i = 1, 2 \quad (1.2.4)$$

Questa semplice osservazione ha alcune interessanti conseguenze. Supponiamo che:

$$0 < k_2 \leq V''(x) \leq k_1 \quad x_- \leq x \leq x_+ \quad (1.2.5)$$

Vogliamo provare che esistono due polinomi di secondo grado  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  che soddisfano le (1.2.2), tali che

$$V_2'' = k_2 \quad V_1'' = k_1 \quad (1.2.6)$$

Ciò segue dalla seguente proposizione e dall'osservazione che, dati due punti del piano e  $k > 0$ , esiste certamente una parabola passante per essi di prefissata curvatura  $k$ .

**Proposizione 1.2.1** *Se le funzioni  $V(x)$ ,  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  soddisfano le condizioni*

$$\begin{aligned} (i) \quad & V_1(x_{\pm}) = V(x_{\pm}) = V_2(x_{\pm}) \\ (ii) \quad & V_2''(x) \leq V''(x) \leq V_1''(x) \quad x_- \leq x \leq x_+ \end{aligned}$$

*allora*

$$V_1(x) \leq V(x) \leq V_2(x)$$

**Dim.** - Dimostriamo che  $V_2(x) \geq V(x)$ . Poniamo pertanto  $\varphi(x) = V_2(x) - V(x)$  ed osserviamo che, per la (i),

$$\varphi(x_-) = \varphi(x_+) = 0$$

Inoltre, per la (ii),  $\varphi''(x) \leq 0$ , il che implica che  $\varphi'(x)$  è non crescente. Supponiamo ora che esista  $\bar{x}$  tale che  $\varphi(\bar{x}) < 0$  e  $x_- < \bar{x} < x_+$ . Per il teorema di Lagrange esisterebbero allora due punti  $x_1$  e  $x_2$  tali che:

$$x_- \leq x_1 \leq \bar{x} \leq x_2 \leq x_+$$

$$\varphi'(x_1) = \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(x_-)}{\bar{x} - x_-} < 0 \quad ; \quad \varphi'(x_2) = \frac{\varphi(x_+) - \varphi(\bar{x})}{x_+ - \bar{x}} > 0$$

in contraddizione con il fatto che  $\varphi'(x)$  è non crescente. Pertanto  $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in [x_-, x_+]$ .

Analogamente si mostra che  $V_1(x) \leq V(x)$  ■

Da questa proposizione segue un importante corollario.

**Proposizione 1.2.2** *Se  $V(x)$  ha un minimo nel punto  $\bar{x}$  e  $V''(\bar{x}) = k > 0$ , allora, se  $E - V(\bar{x})$  è abbastanza piccolo e  $x(0)$  è abbastanza vicino a  $\bar{x}$ , il moto è periodico ed inoltre, detto  $T(E)$  il suo periodo:*

$$\lim_{E \rightarrow V(\bar{x})} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Dim.** - Le ipotesi fatte garantiscono che esiste un intorno  $I$  di  $\bar{x}$ , in cui  $V(x)$  è strettamente decrescente a sinistra di  $\bar{x}$  e strettamente crescente a destra; si può quindi applicare l'analisi della sezione 1.1 e concludere che esiste un intorno dello stato di equilibrio  $(\bar{x}, 0)$  nello spazio delle fasi, in cui le traiettorie sono curve chiuse corrispondenti a moti periodici di energia  $E \geq E_0 = V(\bar{x})$ . È inoltre facile provare con argomenti di continuità che, dato comunque  $\delta > 0$ , questi moti si svolgono all'interno dell'intervallo  $I_\delta = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ , se  $E - E_0$  è abbastanza piccolo. In questo intervallo, vale la stima:

$$\min_{x \in I_\delta} V''(x) = k_{2\delta} \leq V''(x) \leq k_{1\delta} = \max_{x \in I_\delta} V''(x)$$

con  $k_{1\delta}$  e  $k_{2\delta}$  che tendono a  $k$  per  $\delta \rightarrow 0$ . La Prop. 1.2.1 e la (1.2.3) implicano allora che  $\lim_{E \rightarrow E_0} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . ■

Questa proposizione dice in sostanza che i moti periodici che si svolgono nelle vicinanze dello stato di equilibrio (le *piccole oscillazioni* della particella) hanno, a meno di un piccolo errore, lo stesso periodo, che è esattamente quello dei moti che si svolgerebbero sotto l'effetto di una forza elastica di costante di richiamo  $k$ . È questo il fenomeno detto *isocronismo delle piccole oscillazioni*.

Passiamo ora a presentare alcuni esempi di applicazione delle considerazioni precedenti alla stima effettiva del periodo di particolari moti periodici.

**Esempio 1.2.1** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = -\frac{x}{1+x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$$

**Soluzione -** Si noti che:

$$V(x) = \int_0^x du \frac{u}{1+u} = x - \ln |1+x|$$

$$E = \frac{1}{8} \quad m = 1$$

$$V''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

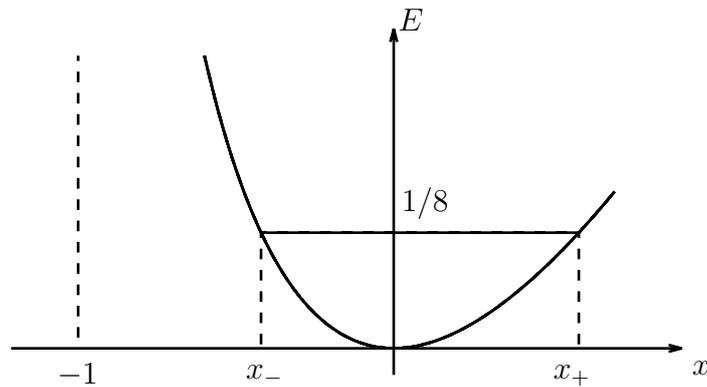


Figura 4: Traiettoria del moto nel piano  $(x, E)$ .

Si può quindi applicare il metodo appena discusso. Poiché  $V''(x)$  è monotona

$$\frac{1}{(1+x_+)^2} \leq V''(x) \leq \frac{1}{(1+x_-)^2} \quad x_- \leq x \leq x_+$$

Tuttavia, poiché  $x_+$  e  $x_-$  non sono calcolabili esplicitamente, per avere delle stime concrete bisogna trovare una stima inferiore per  $x_-$  ed una stima superiore per  $x_+$ . Ciò può farsi banalmente per tentativi (è inutile cercare di ottenere stime molto precise di  $x_-$  e  $x_+$ , dato l'errore notevole introdotto dal metodo usato per la stima di  $T$ ). Si può verificare, ad esempio, che

$$V(0.59) - \frac{1}{8} > 0.001 > 0$$

$$V(-0.43) - \frac{1}{8} > 0.007 > 0$$

Pertanto

$$0.39 < \frac{1}{(1+0.59)^2} \leq V''(x) \leq \frac{1}{(1-0.43)^2} < 3.08$$

$$3.58 < \frac{2\pi}{\sqrt{3.08}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{0.39}} < 10.1$$

Si può quindi affermare che

$$T = 6.84 \pm 3.26$$

il che implica una precisione solo del 50% nella stima di  $T$ .

Se i valori di  $x_-$  e  $x_+$  sono calcolabili esplicitamente, si può procedere talora direttamente al calcolo di  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ , come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 1.2.2** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = -2x - 4x^3, \quad x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**Soluzione -** Si noti che

$$V(x) = x^2 + x^4 \quad E = \frac{3}{4}$$

$$V(x_{\pm}) = E \Rightarrow x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

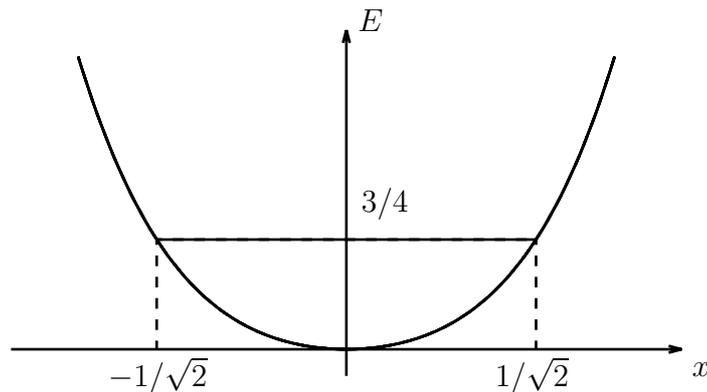


Figura 5: Traiettoria del moto nel piano  $(x, E)$ .

$V_1(x)$  e  $V_2(x)$  sono ovviamente due funzioni pari. Poniamo

$$V_i(x) = \frac{1}{2}k_i x^2 + c_i, \quad i = 1, 2$$

e osserviamo che deve essere verificata la disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}k_1 x^2 + c_1 \leq x^2 + x^4, \quad x^2 \leq \frac{1}{2}$$

Inoltre:

$$V_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}k_1 + c_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow c_1 = \frac{3 - k_1}{4}$$

$k_1$  deve pertanto essere scelto come il più piccolo numero reale che soddisfa la disuguaglianza:

$$p(t) \equiv t^2 + t\left(1 - \frac{k_1}{2}\right) + \frac{k_1 - 3}{4} \geq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ponendo  $t = 0$ , si vede che deve essere  $k_1 \geq 3$ . D'altra parte  $p(t) \geq 0$  se  $t \notin [t_-, t_+]$ , dove

$$t_{\pm} = \frac{k_1}{4} - \frac{1}{2} \pm \left|\frac{k_1}{4} - 1\right|$$

Pertanto

$$k_1 \leq 4 \Rightarrow [t_-, t_+] = \left[\frac{k_1 - 3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$k_1 > 4 \Rightarrow [t_-, t_+] = \left[\frac{1}{2}, \frac{k_1 - 3}{2}\right]$$

Perchè  $[0, \frac{1}{2}]$  sia contenuto nella regione in cui  $p(t) \geq 0$ , deve allora essere  $k_1 \geq 4$ ; si sceglie ovviamente  $k_1 = 4$ .

Ragionando in modo simile, si trova che la scelta ottimale per  $V_2(x)$  è quella per cui  $k_2 = 3$ . Pertanto:

$$\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{4}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} < 1.16\pi$$

$$T = (1.08 \pm .08)\pi$$

Un altro metodo di carattere abbastanza generale per trovare due polinomi di secondo grado che verificano le (1.2.2), senza conoscere  $x_-$  e  $x_+$ , è utilizzato nell'esempio seguente.

**Esempio 1.2.3** *Si stimi inferiormente e superiormente il periodo del moto che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x} = x(x - 1), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$$

**Soluzione -** Si noti che

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad E = \frac{1}{8}$$

$$E - V(x) = \frac{1}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}(x - x_-)(x_+ - x)(x_3 - x)$$

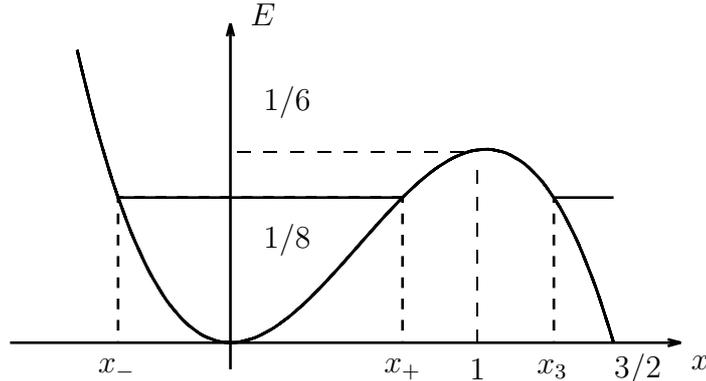


Figura 6: Traiettorie del moto nel piano  $(x, E)$ .

Il calcolo di  $x_-, x_+, x_3$  sarebbe possibile ma laborioso. Lo si può evitare (perdendo ben poco in precisione, dato che la stima di  $T$  è in ogni caso grossolana), osservando che

$$\frac{x_3 - x_+}{3}(x - x_-)(x_+ - x) \leq E - V(x) \leq \frac{x_3 - x_-}{3}(x - x_-)(x_+ - x)$$

da cui segue:

$$T_1 \equiv \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{x_3 - x_-}{3}(x - x_-)(x_+ - x)}} \leq T$$

$$T \leq \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{x_3 - x_+}{3}(x - x_-)(x_+ - x)}} \equiv T_2$$

Per l'osservazione fatta all'inizio del paragrafo, i valori di  $T_1$  e  $T_2$  dipendono solo dal coefficiente di  $x^2$ ; infatti gli integrandi sono della forma  $[E_i - V_i(x)]^{-1/2}$ , con  $E_i - V_i(x_{\pm}) = 0$ . Pertanto

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}(x_3 - x_-)}} \leq T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}(x_3 - x_+)}}$$

Per tentativi si può verificare che:

$$x_- > -0.45; \quad x_+ < 0.68; \quad 1.26 < x_3 < 1.27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 - x_+ > 0.58; \quad x_3 - x_- < 1.72$$

Ne segue che

$$1.86\pi \leq T \leq 3.22\pi$$

$$T = (2.54 \pm 0.68)\pi$$

Nell'esempio 3 si può ottenere una maggiore precisione della stima, procedendo nel modo seguente. Poiché la buca di potenziale non è simmetrica rispetto al punto di minimo, è conveniente dividere in due parti l'integrale che definisce  $T$  e stimare separatamente i due integrali, riducendosi in modo ovvio al caso del periodo di un moto in una buca simmetrica. Più esplicitamente, si scrive:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_-}^0 \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + \sqrt{2} \int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \equiv \frac{1}{2}T_- + \frac{1}{2}T_+ \quad (1.2.7)$$

$$T_- = \sqrt{2} \int_{x_-}^{-x_-} \frac{dx}{\sqrt{E - V_-(x)}} \quad V_-(x) = \begin{cases} V(x) & \text{se } x \leq 0 \\ V(-x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$T_+ = \sqrt{2} \int_{-x_+}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V_+(x)}} \quad V_+(x) = \begin{cases} V(-x) & \text{se } x \leq 0 \\ V(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che  $V''(x) = 1 - 2x$ , per cui  $V''(x) < 0$  per  $x > 1/2$ . Ciò significa che il metodo utilizzato nell'esempio 1 non può applicarsi per stimare direttamente  $T$ , in quanto  $x_+ > 1/2$ . Tuttavia il metodo è applicabile a  $T_-$  in quanto

$$1 \leq V''(x) \leq 1 - 2x_-$$

Ne segue che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2x_-}} \leq T_- \leq 2\pi$$

Per quel che riguarda  $T_+$ , si può procedere nel modo seguente. Cerchiamo un polinomio di secondo grado della forma  $V_2(x) = k_2x^2/2 + c_2$ , tale che  $V_2(x_+) = V(x_+)$  e  $V_2(x) \geq V(x), \forall x \in [0, x_+]$ . Per far ciò, poniamo  $\varphi(x) = V_2(x) - V(x)$  ed osserviamo che, se  $\varphi'(x) \leq 0$  per  $x \in [0, x_+]$ , allora  $\varphi(x)$  è una funzione non crescente fra 0 e  $x_+$ . Poiché  $\varphi(x_+) = 0$ , deve essere  $\varphi(x) \geq 0$  per  $x \in [0, x_+]$ . Per risolvere il problema della determinazione di  $V_2(x)$  è allora sufficiente imporre che

$$V_2'(x) = k_2x \leq V'(x) = x - x^2, \quad 0 \leq x \leq x_+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq x_+ \Rightarrow k_2 \leq 1 - x_+$$

In modo analogo, per trovare un polinomio della forma  $V_1(x) = k_1x^2/2 + c_1$ , tale che  $V_1(x_+) = V(x_+)$  e  $V_1(x) \leq V(x)$ , è sufficiente imporre che

$$\begin{aligned} V_1'(x) = k_1x &\geq V'(x) = x - x^2, & 0 \leq x \leq x_+ &\Rightarrow \\ \Rightarrow k_1 &\geq 1 - x, & 0 \leq x \leq x_+ &\Rightarrow k_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Pertanto

$$2\pi \leq T_+ \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1-x_+}} \quad (1.2.8)$$

Questo stesso procedimento può applicarsi alla stima di  $T_-$ , ottenendo il seguente risultato, migliore del precedente:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-x_-}} \leq T_- \leq 2\pi \quad (1.2.9)$$

Mettendo insieme (1.2.7), (1.2.8) e (1.2.9), si ottiene:

$$1.82\pi < \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x_-}}\right) \leq T \leq \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x_+}}\right) < 2.77\pi$$

### 1.3 Moti unidimensionali in presenza di una forza conservativa ed un attrito lineare

Si consideri una particella puntiforme di massa  $m$  soggetta alla forza conservativa  $f(x) = -V'(x)$  ed alla forza di attrito lineare  $-\lambda\dot{x}$ ,  $\lambda > 0$ . L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + V'(x) = 0 \quad (1.3.1)$$

cui corrisponde il sistema del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m}V'(x) - \frac{\lambda}{m}v \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

La prima osservazione da fare è che l'energia non è più conservata; infatti

$$\dot{E} = mv\dot{v} + V'(x)v = -\lambda v^2 \quad (1.3.3)$$

Questa equazione dà tuttavia una importante informazione qualitativa: il moto deve svolgersi in modo che  $E(t)$  sia una funzione non crescente del tempo.

Un'altra osservazione importante è che gli stati di equilibrio sono gli stessi del caso  $\lambda = 0$ .

Vediamo come utilizzare queste informazioni, cominciando da un caso particolarmente semplice, quello in cui  $V(x)$  è un potenziale del tipo di quello rappresentato in Fig. 7 (per esempio  $V(x) = kx^2/2$ ), quando cioè  $V(x)$  presenta un solo minimo, diciamo in  $x = 0$ , diverge per  $x \rightarrow \pm\infty$  ed ha

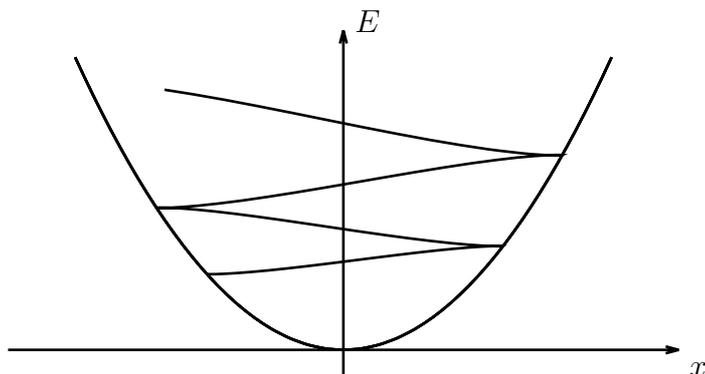


Figura 7: Esempio di traiettoria in presenza di attrito.

derivata sempre diversa da zero, eccetto che in  $x = 0$ ; supporremo anche che  $V(0) = 0$ .

Vogliamo mostrare che per ogni soluzione della (1.3.1) risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

quali che siano  $\lambda > 0$  e  $m > 0$  e che la traiettoria nel piano  $(x, E)$  ha l'andamento qualitativo indicato in Fig. 7, con un numero di oscillazioni che può essere infinito o finito, a secondo del valore di  $\lambda$ .

Supponiamo che il punto iniziale della traiettoria (nel piano  $(x, E)$ ) sia  $(x_0, v_0)$ , con  $x_0 < 0$  e  $v_0 \geq 0$ . Allora il punto  $(x(t), E(t))$  si sposterà inizialmente verso destra; facciamo vedere che si possono presentare due soli comportamenti:

- 1)  $x(t)$  e  $E(t)$  tendono ambedue a 0 per  $t \rightarrow \infty$  in modo monotono;
- 2) esiste un tempo finito  $t_1$ , tale che  $(x(t), E(t))$  tende, per  $t \rightarrow t_1$ , ad un punto  $(x_1, E_1)$  della curva  $E = V(x)$ , tale che  $x_1 \neq 0$  e  $E_1 < E(0)$ .

Cominciamo con l'osservare che, se la traiettoria non incontra mai la curva  $E = V(x)$ ,  $\dot{x}(t)$  è sempre positivo e pertanto  $x(t)$  è una funzione monotona crescente; esiste pertanto il limite  $\bar{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Anche  $E(t)$  è una funzione monotona (decescente); pertanto esiste anche il limite  $\bar{E} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$ . Poiché  $\dot{x}(t) = \sqrt{2[E(t) - V(x(t))]/m}$ , esiste anche  $\bar{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ . Si può anche affermare che  $\bar{v} = 0$ ; infatti, se una funzione converge per  $t \rightarrow \infty$  insieme alla sua derivata, il limite della derivata è necessariamente nullo, come è facile dimostrare.

Facciamo ora vedere che deve necessariamente essere  $\bar{x} = 0$ . Infatti la (1.3.1) implica che esiste anche il limite  $\bar{a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t)$  e che  $\bar{a} = -V'(\bar{x})/m$ .

Ma  $\bar{a} = 0$ , visto che convergono sia  $\dot{x}(t)$  che  $\ddot{x}(t)$ , e ciò è possibile solo se  $\bar{x} = 0$ . L'alternativa esposta precedentemente è pertanto dimostrata.

Supponiamo ora che la traiettoria raggiunga la curva  $E = V(x)$ ; possiamo allora ripetere il ragionamento precedente, prendendo  $(x(t_1), E_1)$  come punto iniziale, e concludere che o  $(x(t), E(t)) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$  oppure esiste un tempo finito  $t_2$ , tale che  $(x(t), E(t))$  tende, per  $t \rightarrow t_2$ , ad un punto  $(x_2, E_2)$  del ramo a sinistra dello 0 della curva  $E = V(x)$ , tale che  $x_2 \neq 0$  e  $E_2 < E_1$ .

Questo ragionamento può essere iterato e si arriva alla conclusione che deve verificarsi una delle due seguenti situazioni:

- 1)  $x(t)$  e  $E(t)$  tendono ambedue a 0 per  $t \rightarrow \infty$ , dopo un numero finito di oscillazioni di  $x(t)$  intorno all'origine;
- 2)  $E(t)$  converge decrescendo a  $E_\infty \geq 0$ , mentre  $x(t)$  compie un numero infinito di oscillazioni.

Ci rimane da far vedere che anche nel secondo caso  $x(t)$  tende a 0. Infatti, se così non fosse,  $E_\infty$  sarebbe maggiore di 0, mentre  $x(t)$  oscillerebbe asintoticamente fra gli estremi dell'intervallo  $[x_-, x_+]$ , con  $V(x_\pm) = E_\infty$ ; ciò è tuttavia impossibile per la ragione seguente.

L'intervallo  $[x_-, x_+]$  contiene certamente un intervallo  $[a, b]$ , tale che  $E_\infty - V(x) \geq \gamma > 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Pertanto, mentre attraversa l'intervallo  $[a, b]$ , la particella ha certamente una velocità maggiore in modulo di  $\bar{v} = \sqrt{2\gamma/m}$ . D'altra parte,  $\forall t > 0$ , è certamente  $|\dot{x}(t)| = \sqrt{2[E(t) - V(x(t))]/m} \leq \sqrt{2E(0)/m} = \alpha$ ; quindi la particella impiega ogni volta un tempo maggiore o eguale a  $\tau = (b - a)/\alpha$  per percorrere l'intervallo  $[a, b]$ . Ne segue, per la (1.3.3), che, se  $t_1$  e  $t_2$  sono gli estremi di un intervallo di tempo in cui la particella attraversa  $[a, b]$ , si ha:

$$|E(t_2) - E(t_1)| = \lambda \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^2 dt \geq \lambda \tau \bar{v}^2 > 0$$

cioè in ogni attraversamento di  $[a, b]$  l'energia diminuisce di una quantità finita e abbiamo supposto che ci sono infiniti attraversamenti. Ciò è tuttavia impossibile, in quanto  $E(0) - E_\infty$  è una quantità finita.

Passiamo ora a considerare un caso un pò più complicato, quale quello del potenziale  $V(x) = x^2 e^{-x}$ , rappresentato in Fig. 8.

La caratteristica rilevante di questo potenziale, da un punto di vista qualitativo, è che presenta due punti stazionari, uno di minimo  $x_m$  ed uno di massimo  $x_M$ , corrispondenti a due punti di equilibrio, e che  $V(x)$  diverge per  $x \rightarrow -\infty$ , mentre tende a 0, per  $t \rightarrow \infty$ . In una situazione del genere si suol dire che nell'intorno del punto di minimo c'è una *bucca di potenziale* con una *barriera di potenziale* infinita sulla sinistra ed una barriera finita sulla destra. Nel caso precedente la barriera di potenziale era infinita da ambedue i lati.

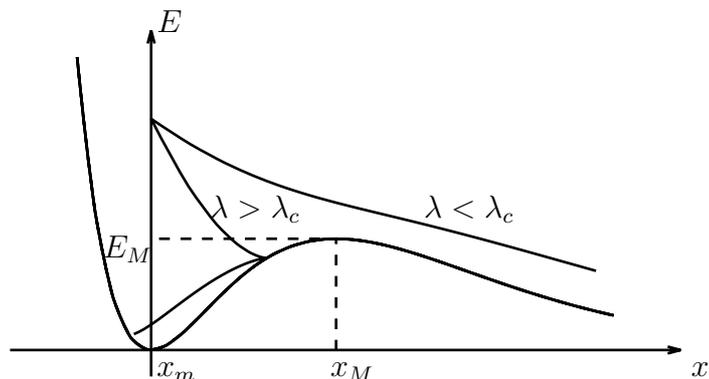


Figura 8: Esempi di traiettorie con diversi valori di  $\lambda$ .

La presenza di una barriera di potenziale finita sulla destra del minimo comporta delle differenze qualitative notevoli rispetto al caso precedente, differenze che possono essere facilmente messe in evidenza considerando le traiettorie nel piano  $(x, E)$  che passano al tempo  $t = 0$  per un punto  $(x_m, E_0)$  dell'asse  $E$  con velocità positiva.

Detta  $E_M = V(x_M)$  l'altezza della barriera di potenziale, è chiaro che, se  $E_0 \leq E_M$ , possiamo procedere esattamente come nel caso precedente; infatti la traiettoria deve essere contenuta necessariamente all'interno della buca di potenziale ed i valori di  $V(x)$  al di fuori della buca non hanno alcuna rilevanza. Pertanto  $x(t)$  tende a  $x_m$  per  $t \rightarrow \infty$ , dopo aver compiuto un numero finito o infinito di oscillazioni.

Lo stesso risultato si ottiene ovviamente anche se  $E_0 > E_M$ , purché l'energia scenda al di sotto del valore  $E_M$  prima che  $x(t)$  abbia raggiunto il punto di massimo.

È anche chiaro però che, se  $E_0$  è abbastanza grande, la traiettoria riesce a superare la barriera di potenziale. In questo caso la traiettoria prosegue verso l'infinito, non essendo possibile che converga verso un punto della curva  $E = V(x)$ , nè in un tempo finito nè in un tempo infinito. Che non possa convergere verso la curva del potenziale in un tempo infinito si dimostra come prima. Per escludere che questa convergenza possa realizzarsi in un tempo finito, supponiamo che esista  $\bar{t} > 0$ , tale che  $x(t) \rightarrow \bar{x} > x_M$  e  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \bar{t}$  (ipotesi equivalenti per i soliti argomenti all'ipotesi che vogliamo escludere). Se ciò fosse vero, sarebbe anche vero che  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \ddot{x}(t) = -V'(\bar{x})/m > 0$ , in contraddizione con il fatto che  $\dot{x}(t) > 0$  per  $t < \bar{t}$ .

Per ovvie ragioni di continuità, esiste sull'asse  $E$  anche un punto da cui parte (con velocità positiva) una traiettoria che converge asintoticamente verso il punto di massimo della barriera,  $(x_M, E_M)$ . È anche facile convincersi che c'è un'altra traiettoria che converge verso questo punto e che proviene

dall'infinito, così come ci sono altre due traiettorie che tendono asintoticamente verso il massimo della barriera per  $t \rightarrow -\infty$ , una verso destra ed una verso sinistra. Può essere istruttivo provare a disegnare qualitativamente queste quattro traiettorie nello spazio delle fasi (vedi Fig. 9); il disegno che ne risulta dà un'indicazione d'insieme molto chiara della situazione generale, tenendo conto opportunamente che traiettorie diverse non possono intersecarsi nello spazio delle fasi (ciò non è vero nel piano  $(x, E)$ ).

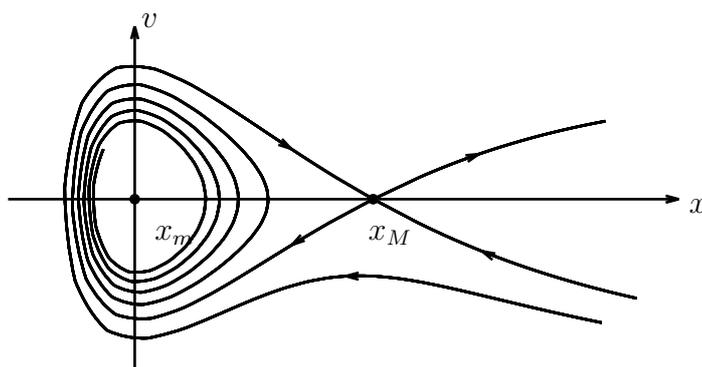


Figura 9: Esempi di traiettorie nello spazio delle fasi.

Proviamo ora a ottenere delle stime esplicite sui valori di  $\lambda$  in corrispondenza dei quali la traiettoria che parte da  $x_0 = 0$  con  $v_0 > 0$ , anzichè dirigersi verso il minimo, supera la barriera di potenziale.

Come sappiamo l'energia è una funzione monotona decrescente del tempo. Sia

$$0 < t_1 \leq +\infty$$

il primo istante di arresto del corpo ed  $x_1$  la posizione occupata in tale istante.

Poichè  $x(t)$  è monotona in  $[0, t_1]$ , la funzione inversa  $t(x)$  è ben definita in  $[x_0, x_1]$ ; essa rappresenta l'istante in cui la particella passa per il punto  $x$ . Possiamo allora definire in  $[x_0, x_1]$  la funzione

$$\tilde{E}(x) = E(t(x))$$

che rappresenta l'energia posseduta dalla particella quando transita per il punto  $x$ .

$\tilde{E}(x)$  è una funzione decrescente; pertanto, se si riesce a provare che  $\tilde{E}(x) < V(x_M)$  per qualche  $x \in [x_0, x_M)$ , la continuità di  $x(t)$  implica che  $x_1 < x_M$ ; ne segue che  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_m$ .

Talora si riesce invece a provare che  $\tilde{E}(x) > V(x_M)$ ,  $\forall x \in [x_0, x_M)$ ; ciò ovviamente implica che  $x_1 > x_M$  e pertanto il valore di  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  dipende dall'andamento di  $V(x)$  per  $x > x_M$  (nell'esempio di Fig. 8  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ ).

Vediamo come si possano ottenere informazioni del tipo di quelle appena indicate sulla funzione  $\tilde{E}(x)$ . Si osservi che, per la (1.3.3):

$$\frac{d\tilde{E}(x)}{dx} = \frac{dE(t)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dE}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\lambda \dot{x}^2 / \dot{x} = -\lambda \dot{x} \quad (1.3.4)$$

D'altra parte, per la definizione dell'energia e la positività di  $\dot{x}(t)$  per  $t \in [0, t_1]$ :

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}[E(t) - V(x(t))]} \quad (1.3.5)$$

Le (1.3.4) e (1.3.5) implicano che:

$$\frac{d\tilde{E}(x)}{dx} = -\lambda \sqrt{\frac{2}{m}[\tilde{E}(x) - V(x)]}$$

Integrando fra  $x_0$  e  $x \leq x_1$ , si ottiene

$$\tilde{E}(x) = E(0) - \lambda \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_0}^x dy \sqrt{\tilde{E}(y) - V(y)} \quad (1.3.6)$$

La (1.3.6) implica immediatamente che esiste un *valore critico*  $\lambda_c$  di  $\lambda$ , tale che la traiettoria supera la barriera di potenziale se  $0 \leq \lambda < \lambda_c$  (eventualmente in seguito potrebbe riattraversarla in senso inverso), mentre viene attirata asintoticamente verso il fondo della buca, senza mai attraversare la barriera, se  $\lambda > \lambda_c$ . È facile convincersi che, se  $\lambda = \lambda_c$ , la traiettoria tende asintoticamente al punto di massimo.

La (1.3.6) permette facilmente di ottenere una stima inferiore ed una superiore di  $\lambda_c$ , come vediamo subito facendo un esempio.

**Esempio 1.3.1** *Si consideri il moto che soddisfa la (1.3.1) con  $m = 1$ , potenziale*

$$V(x) = x^2(x - 1)^2$$

*e condizioni iniziali*

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1/2$$

*Trovare una stima inferiore ed una superiore del valore critico  $\lambda_c$  del coefficiente di attrito*

**Soluzione -** Il potenziale ha l'andamento mostrato in Fig. 10.

Ci troviamo pertanto in una situazione simile a quella di Fig. 8, con  $x_0 = x_m = 0$ ,  $x_M = 1/2$ ,  $\dot{x}(0) > 0$ . La (1.3.6) diventa:

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{8} - \lambda \sqrt{2} \int_0^x dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y - 1)^2} \quad (1.3.7)$$

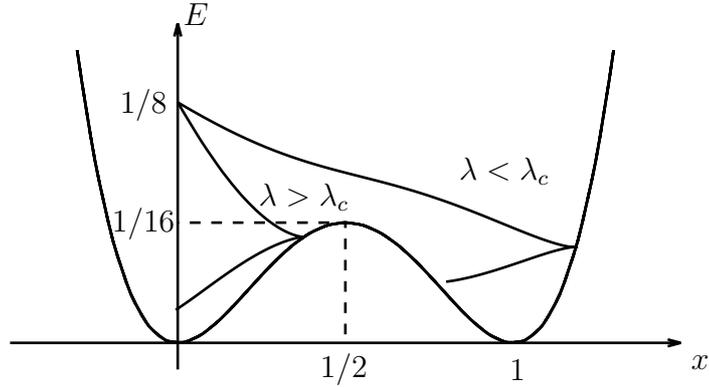


Figura 10: Esempi di traiettorie nel piano  $(x, E)$ .

Supponiamo  $\lambda > \lambda_c$ ; per definizione ciò implica che esiste  $\bar{x} \in (0, 1/2)$ , tale che

$$\tilde{E}(\bar{x}) = \frac{1}{16} \quad \tilde{E}(x) \geq \frac{1}{16} \quad \text{se } 0 \leq x \leq \bar{x} < x_1$$

Usando la (1.3.7) e la monotonia di  $V(x)$  in  $[0, 1/2]$ , si ottiene:

$$\frac{1}{16} = \lambda\sqrt{2} \int_0^{\bar{x}} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} \geq \lambda\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}$$

Pertanto

$$\frac{1}{16\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}} \geq \lambda > \lambda_c \quad (1.3.8)$$

Poichè  $\bar{x}$  nella (1.3.8) può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1/2, si ha:

$$\lambda_c < \lambda_2 \equiv \inf_{\bar{x} \in (0, 1/2)} \frac{1}{16\sqrt{2\bar{x}} \sqrt{\frac{1}{16} - V(\bar{x})}}$$

Supponiamo viceversa  $\lambda < \lambda_c$ ; perchè ciò accada deve risultare  $\tilde{E}(1/2) > V(1/2) = 1/16$  e quindi, per la (1.3.7):

$$\lambda\sqrt{2} \int_0^{1/2} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} < \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \quad (1.3.9)$$

Poichè

$$\int_0^{1/2} dy \sqrt{\tilde{E}(y) - y^2(y-1)^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{E(0) - V(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8}}$$

la (1.3.9) è sicuramente soddisfatta se

$$\lambda\sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8}} \leq \frac{1}{16}$$

cioè se  $\lambda \leq 1/4$ . Pertanto

$$\lambda_c > \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

## 1.4 Un modello matematico di orologio

Il funzionamento di un orologio è basato sull'esistenza di un meccanismo che è in grado di compiere un moto periodico sostanzialmente stabile rispetto a piccole perturbazioni. In genere si può schematizzare tale meccanismo con un oscillatore armonico soggetto ad un debole attrito e ad una forza che agisce su di esso in modo da permettergli di recuperare l'energia persa a causa dell'attrito. Perché tale recupero di energia sia possibile, si fa in modo che tale forza agisca in verso concorde a quello della velocità. Il modello matematico più semplice di un orologio, corrispondente alle osservazioni precedenti, è pertanto descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(\dot{x}) \quad (1.4.1)$$

dove  $F(\eta)$  è una funzione positiva e regolare, nulla per  $\eta \leq 0$ .

Per semplificare ulteriormente il problema, supporremo che  $F(\eta)$  sia costante per  $\eta > 0$ , cioè che:

$$F(\eta) = \begin{cases} F_0 & \text{se } \eta > 0 \\ 0 & \text{se } \eta = 0 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Ciò implica che  $F(\eta)$  è discontinua in  $\eta = 0$  e quindi che l'equazione differenziale 1.4.1 deve essere opportunamente interpretata per i valori di  $t$  tali che  $\dot{x}(t) = 0$ . Noi faremo l'assunzione che le soluzioni del nostro problema si ottengono raccordando con continuità le soluzioni valide nella regione dello spazio delle fasi  $\{\dot{x} > 0\}$  con quelle valide nella regione  $\{\dot{x} < 0\}$ . È ragionevole aspettarsi che i moti così definiti si possano ottenere anche come limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  delle soluzioni della 1.4.1 con  $F = F_\varepsilon$ , essendo  $F_\varepsilon$  una funzione regolare e nulla per  $\eta < 0$ , che converge alla funzione 1.4.2 per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Supponiamo infine che il coefficiente di attrito  $\lambda$  sia tale che

$$\lambda^2 < 4mk \quad (1.4.3)$$

Ciò implica che, data una costante  $c$  qualunque, il problema seguente:

$$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = c \quad (1.4.4)$$

con condizioni iniziali

$$y(t_0) = a \quad , \quad \dot{y}(t_0) = 0 \quad (1.4.5)$$

ammette come soluzione la funzione

$$y(t) = \left(a - \frac{c}{k}\right)e^{-(t-t_0)/\tau} \left[\frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega(t-t_0)) + \cos(\omega(t-t_0))\right] + \frac{c}{k} \quad (1.4.6)$$

dove

$$\tau = 2m/\lambda \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} \quad (1.4.7)$$

Ciò segue facilmente dall'osservazione che la soluzione generale dell'equazione 1.4.4 si può scrivere come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare costante  $\bar{y}(t) = c/k$ .

Consideriamo ora la soluzione della 1.4.1, che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 > 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.4.8)$$

e la cui traiettoria nello spazio delle fasi, all'istante  $t = 0$ , attraversa l'asse  $x$  dall'alto verso il basso, vedi Fig. 11.

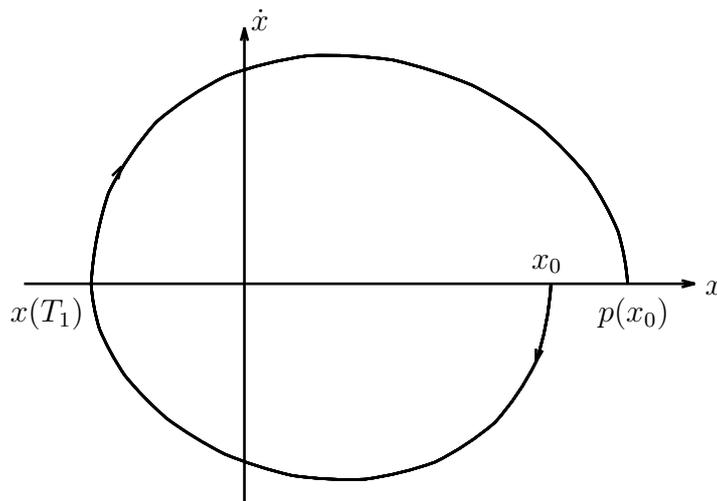


Figura 11: Esempio di traiettoria.

La soluzione del nostro problema deve pertanto coincidere con la soluzione della 1.4.4, con  $c = 0$  e gli stessi dati iniziali, almeno per valori positivi di  $t$  abbastanza piccoli; ciò deve anzi essere vero fino al tempo  $T_1$  tale che  $\dot{x}(t) < 0$  per  $0 < t < T_1$  e  $\dot{x}(T_1) = 0$ . Si ha pertanto:

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right] \quad , \quad 0 \leq t \leq T_1 \quad (1.4.9)$$

ed è facile vedere che

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega} \quad (1.4.10)$$

Al tempo  $T_1$  la traiettoria attraversa l'asse  $x$  dal basso verso l'alto, nel punto di ascissa  $x(T_1) = -x_0 e^{-\pi/(\tau\omega)}$ , in quanto  $\dot{x}(T_1) = -kx(T_1) > 0$ . Pertanto, per  $T_1 < t < T_2$ , la soluzione della 1.4.1 deve coincidere con la soluzione della 1.4.4, con  $c = F_0$  e dati iniziali

$$y(T_1) = x(T_1) \quad , \quad \dot{y}(T_1) = 0 \quad (1.4.11)$$

essendo  $T_2$  definito dalla condizione che  $\dot{x}(t) > 0$  per  $T_1 < t < T_2$  e  $\dot{x}(T_2) = 0$ . Si ha pertanto:

$$x(t) = \left(x(T_1) - \frac{F_0}{k}\right) e^{-(t-T_1)/\tau} \left[ \frac{1}{\tau\omega} \sin(\omega(t-T_1)) + \cos(\omega(t-T_1)) \right] + \frac{F_0}{k} \quad (1.4.12)$$

ed è facile vedere che  $T_2 = 2T_1$ .

Al tempo  $T_2$  la traiettoria interseca nuovamente l'asse  $x$  positivo dall'alto verso il basso, per cui il procedimento precedente può iterarsi. Pertanto la soluzione della 1.4.1 può essere calcolata, in linea di principio, per ogni valore positivo di  $t$  (ed anche per ogni valore negativo, procedendo in modo simile), anche se non è possibile dare una espressione esplicita che valga per tutti i tempi.

Siamo tuttavia in grado, senza fare altri calcoli, di stabilire le proprietà principali delle soluzioni, utilizzando solo le 1.4.9 e 1.4.12. Queste equazioni ci permettono infatti di determinare la relazione che intercorre fra l'intersezione  $x_0$  di una traiettoria con l'asse  $x$  positivo e l'intersezione successiva, che chiameremo  $p(x_0)$ . Basta considerare la soluzione della 1.4.1 con dati iniziali 1.4.8 ed osservare che  $p(x_0)$  coincide con  $x(T_2)$ ; si ha pertanto:

$$p(x_0) = f(1 + \sigma) + x_0\sigma^2 \quad , \quad f = \frac{F_0}{k} \quad , \quad \sigma = e^{-\pi/(\tau\omega)} \quad (1.4.13)$$

Questa funzione, nel linguaggio della teoria dei sistemi dinamici, è chiamata la *mappa di Poincaré* del sistema dinamico associato alla 1.4.1 rispetto all'asse  $x$  positivo. Essa permette di evidenziare alcune proprietà notevoli della 1.4.1, nel modo seguente.

Si osserva innanzi tutto che le soluzioni periodiche della 1.4.1 sono univocamente individuate dai valori di  $x_0$  tali che  $p(x_0) = x_0$ ; infatti, per tali valori di  $x_0$ , la traiettoria nello spazio delle fasi si chiude, il che è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di moti periodici per un sistema unidimensionale con forze indipendenti dal tempo, come è quello che stiamo studiando. Dalla 1.4.13 segue allora che c'è una sola soluzione periodica, che interseca l'asse  $x$  positivo nel punto  $\bar{x}$ , con

$$\bar{x} = \frac{f}{1 - \sigma} \quad (1.4.14)$$

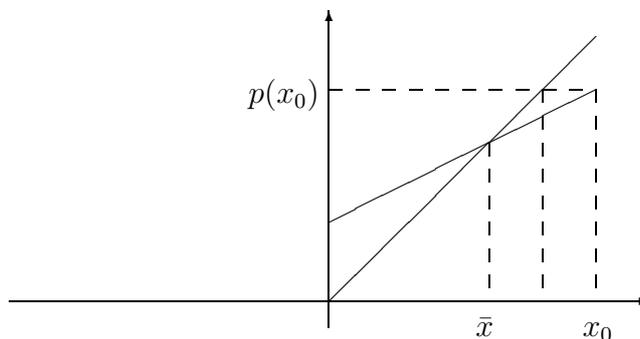


Figura 12: Mappa di Poincaré.

corrispondente in Fig. 12 all'intersezione del grafico di  $p(x_0)$  con la bisettrice degli assi (si noti che  $\sigma < 1$ ).

Inoltre, la funzione 1.4.13 ha la proprietà (vedi Fig. 12) che, se  $x_0 > \bar{x}$ , allora  $\bar{x} < p(x_0) < x_0$ , mentre, se  $x_0 < \bar{x}$ , allora  $\bar{x} > p(x_0) > x_0$  (come nell'esempio di Fig. 11). Ciò significa che tutte le traiettorie tendono ad avvicinarsi alla traiettoria chiusa corrispondente ad  $x_0 = \bar{x}$ ; è anzi facile convincersi che tutte le traiettorie convergono asintoticamente alla traiettoria periodica con velocità esponenziale. Questa proprietà si suole di solito indicare dicendo che *l'orbita periodica è attrattiva*; essa implica che il sistema, quali che siano le condizioni iniziali, si muove asintoticamente secondo la soluzione periodica. Ne segue anche che il sistema, una volta che abbia raggiunto la situazione di moto asintotica a meno di una piccola residua differenza (che rimane sempre, poichè le traiettorie non possono intersecarsi, ma è praticamente irrilevante), è sostanzialmente insensibile a piccole perturbazioni del suo stato; infatti tali perturbazioni producono uno spostamento dalla traiettoria che il moto tende ad annullare rapidamente.

Le considerazioni precedenti giustificano l'affermazione che la 1.4.1 è un modello di orologio, cioè di un sistema che si muove di moto periodico di un periodo fissato, sostanzialmente stabile rispetto a piccole perturbazioni.

## 2 Sistemi vincolati

### 2.1 Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di  $N$  particelle soggetto ad un sistema di vincoli bilateri ideali indipendenti dal tempo.

Se  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{3N}(t))$  individua la configurazione del sistema al tempo  $t$ , si ha:

$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i(x(t), \dot{x}(t)) + R_i(x(t), \dot{x}(t)) \quad (2.1.1)$$

dove  $F$  descrive le forze attive e  $R$  le reazioni vincolari. Supponiamo che il sistema di vincoli costringa il moto su di una superficie regolare  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3N}$ . Allora, fissato un qualunque istante  $t$ , esiste un aperto  $U \subset \mathbb{R}^{3N}$  ed un intervallo aperto  $I$  contenente  $t$ , tali che  $x(s) \in \Sigma \cap U$ ,  $\forall s \in I$ , ed un diffeomorfismo  $\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow U$ , tale che, indicando con  $\alpha$  i punti di  $\Omega$ ,

$$\tilde{\Phi}^{-1}(\Sigma \cap U) = \{\alpha \in \Omega : \alpha_1 = \dots = \alpha_{3N-l} = 0\}$$

se  $l$  è la dimensione della superficie.

Sia  $V = \tilde{\Phi}^{-1}(\Sigma \cap U)$  e sia  $\Phi$  la restrizione di  $\tilde{\Phi}$  a  $V$ ;  $\Phi$  è ovviamente un diffeomorfismo di  $V \subset \mathbb{R}^l$  in  $\Sigma \cap U$ . Indichiamo con  $q = (q_1, \dots, q_l)$  un punto di  $V$ ; le componenti di  $q$  si chiamano *coordinate lagrangiane*.

Sia ora  $\mathcal{M}_t$  l'insieme delle funzioni  $\bar{q}(s)$ ,  $s \in (t-1, t+1)$ , tali che

$$\begin{aligned} i) \quad & \bar{q}(s) \in V \quad \forall s \\ ii) \quad & \Phi(\bar{q}(t)) = x(t) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

e poniamo inoltre,  $\forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t$ ,  $\xi(s) = \Phi(\bar{q}(s))$ .  $\xi(s)$  rappresenta un moto passante per  $x(t)$  e compatibile con i vincoli. La definizione di vincolo ideale implica allora che:

$$\sum_{i=1}^{3N} R_i(x(t), \dot{x}(t)) \dot{\xi}_i(t) = 0 \quad \forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t \quad (2.1.3)$$

Dalle (2.1.1) e (2.1.3) si deduce che,  $\forall \bar{q}(s) \in \mathcal{M}_t$ :

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \dot{\xi}_i(t) = \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \dot{\xi}_i(t) \quad (2.1.4)$$

Usando la definizione di  $\xi(s)$ , la (2.1.4) diventa:

$$\sum_{j=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) - \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) \right\} \dot{q}_j(t) = 0 \quad (2.1.5)$$

È facile rendersi conto che l'arbitrarietà di  $\bar{q}(s)$  in  $\mathcal{M}_t$  implica l'arbitrarietà del vettore  $\dot{\bar{q}}(t)$  in  $\mathbb{R}^l$ . D'altra parte, per la (2.1.2),  $\bar{q}(t)$  è costante al variare in  $\mathcal{M}_t$  della funzione  $\bar{q}(s)$ . La (2.1.5) è pertanto equivalente all'equazione:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) = \tilde{Q}_j(t) \quad j = 1, \dots, l \quad (2.1.6)$$

avendo definito

$$\tilde{Q}_j(t) = \sum_{i=1}^{3N} F_i(x(t), \dot{x}(t)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(\bar{q}(t)) \quad (2.1.7)$$

$\tilde{Q}(t)$  è detta *forza lagrangiana*.

Indichiamo ora con  $q(s) = \Phi^{-1}(x(s))$  la legge oraria del moto del sistema di particelle nelle coordinate lagrangiane. Questa funzione è ben definita finché  $x(s) \in U$ , il che avverrà certamente per un opportuno intervallo di tempo  $I$  tale che  $t \in I$ . Poichè il ragionamento precedente può ripetersi per ogni  $s \in I$ , la (2.1.6) implica che

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(s)) = \tilde{Q}_j(s) \quad , \quad s \in I \quad (2.1.8)$$

Cerchiamo ora di riscrivere la (2.1.8) come un sistema di equazioni differenziali nelle coordinate lagrangiane. Definiamo pertanto

$$T(\alpha, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[ \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q) \alpha_j \right]^2 \quad (2.1.9)$$

ed osserviamo che  $T(\dot{q}(t), q(t))$  rappresenta l'energia cinetica, poichè

$$\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} \Phi_i(q(t)) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t)$$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha_k}(\dot{q}(t), q(t)) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[ \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}(q(t)) + \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_k \partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \\ \frac{\partial T}{\partial q_k}(\dot{q}(t), q(t)) &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[ \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] \cdot \left[ \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_j \partial q_k}(q(t)) \dot{q}_j(t) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i(t) \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial q_k \partial q_j}(q(t)) \dot{q}_j(t) \end{aligned}$$

Pertanto la (2.1.8) può risciversi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) - \frac{\partial T}{\partial q_j}(\dot{q}(t), q(t)) = Q_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.1.10)$$

avendo definito  $Q(\alpha, q)$  così che  $Q(\dot{q}(t), q(t)) = \tilde{Q}(t)$ . Le (2.1.10) sono chiamate *equazioni di Lagrange*.

In realtà la validità della (2.1.10) si estende al caso di vincoli dipendenti dal tempo. In tal caso i moti compatibili con i vincoli si esprimono in termini delle variabili lagrangiane tramite funzioni che dipendono esplicitamente dal tempo:

$$x(s) = \Phi(q(s), s)$$

Ora, tuttavia, nella definizione di vincolo ideale non compaiono più moti di questo tipo, ma i cosiddetti *moti virtuali*. Fissato un istante  $t$ , un moto virtuale passante per  $x(t)$  è una funzione  $\xi(s)$ , definita in un intorno di  $t$ , della forma

$$\xi(s) = \Phi(\bar{q}(s), t)$$

tale che  $\xi(t) = x(t)$ . Si tratta in sostanza di moti compatibili con i vincoli presenti all'istante  $t$  e supposti indipendenti dal tempo.

È immediato verificare che la (2.1.5), e quindi la (2.1.8), sono ancora valide. Ciò che cambia è invece la (2.1.9), che deve essere sostituita dalla

$$T(\alpha, q, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[ \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}(q, t) \alpha_j + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(q, t) \right]^2 \quad (2.1.11)$$

in modo da tenere conto della dipendenza esplicita dal tempo di  $\Phi(q, t)$ , cioè del contributo alla velocità del moto dei vincoli (quello che viene eliminato nella definizione di moto virtuale). La (2.1.10) rimane tuttavia inalterata, come è facile verificare.

Supponiamo ora che le forze attive siano conservative, cioè che esista una funzione  $\tilde{\mathcal{V}}(x)$  tale che

$$F_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial x_i}(x(t))$$

La (2.1.7) diventa allora:

$$Q_j(t) = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}(q(t))$$

avendo definito

$$\mathcal{V}(q) = \tilde{\mathcal{V}}(\Phi(q)) \quad q \in V$$

In tal caso le (2.1.10) assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}(\dot{q}(t), q(t)) = 0$$

dove

$$\mathcal{L}(\alpha, q) = T(\alpha, q) - \mathcal{V}(q)$$

e vale inoltre la *conservazione dell'energia*:

$$T(\dot{q}(t), q(t)) + \mathcal{V}(q(t)) = \text{costante} \quad (2.1.12)$$

## 2.2 Posizioni di equilibrio

Una immediata conseguenza delle (2.1.10) è la seguente proposizione (*Principio dei lavori virtuali*).

**Proposizione 2.2.1** *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema si trovi in equilibrio nella posizione di coordinate lagrangiane  $q_0$  è che*

$$Q_j(0, q_0) = 0 \quad (2.2.1)$$

**Dim.** - Riscriviamo la (2.1.9) nella forma:

$$T(\alpha, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l g_{ij}(q) \alpha_i \alpha_j$$

Dall'osservazione che l'energia cinetica è positiva, eccetto che nel caso in cui tutte le particelle hanno velocità nulla, segue subito che,  $\forall q \in V$ ,  $T(\alpha, q)$  è una forma quadratica definita positiva nelle variabili  $\alpha$ . Pertanto la matrice  $g_{ij}(q)$  è una matrice simmetrica e invertibile,  $\forall q \in V$ . Notiamo ora che:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_j}(\dot{q}(t), q(t)) = \sum_{i=1}^l g_{ji}(q(t)) \dot{q}_i(t) \quad (2.2.2)$$

Combinando la (2.1.10) con la (2.2.2), la (2.1.10) può essere riscritta nella forma:

$$\sum_{i=1}^l g_{ji}(q(t)) \ddot{q}_i(t) = G_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.2.3)$$

con

$$G_j(\alpha, q) = - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l \frac{\partial g_{ji}}{\partial q_k} \alpha_k \alpha_i + \frac{\partial T}{\partial q_j}(\alpha, q) + Q_j(\alpha, q)$$

Poichè  $g_{ij}(q)$  è invertibile, la (2.2.3) può risciversi come un'equazione differenziale ordinaria in forma normale (cioè risolta rispetto alle derivate di ordine massimo):

$$\ddot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^l g_{ij}^{-1}(q(t)) G_j(\dot{q}(t), q(t)) \quad (2.2.4)$$

Alla (2.2.4) si può applicare il Teorema di unicità della soluzione con dato iniziale fissato. Ciò significa in particolare che c'è una ed una sola soluzione tale che  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ . È d'altra parte immediato verificare che, se è valida la (2.2.1),  $q(t) = q_0$  è una soluzione della (2.1.10). Pertanto  $q_0$  è una soluzione d'equilibrio. ■

È in generale importante sapere se una posizione di equilibrio è stabile o meno. L'idea intuitiva di stabilità è resa precisa in modo naturale dalla seguente definizione.

**Definizione 2.2.1** *Una posizione di equilibrio  $q_0$  si dice stabile se esiste  $\varepsilon_0 > 0$  e due funzioni  $\delta(\varepsilon)$  e  $\rho(\varepsilon)$ , definite per  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e infinitesime per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tali che, se  $T(\dot{q}(0), q(0)) \leq \varepsilon$  e  $|q(0) - q_0| \leq \delta(\varepsilon)$ ,  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , allora*

$$|q(t) - q_0| \leq \rho(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Passiamo ora a discutere una condizione di stabilità delle posizioni di equilibrio, valida nel caso in cui le forze attive siano conservative.

**Proposizione 2.2.2** *Se  $q_0$  è un punto di minimo in senso stretto del potenziale  $\mathcal{V}(q)$ , con matrice hessiana definita positiva, allora  $q_0$  è una posizione di equilibrio stabile.*

**Dim.** - Poichè, al solito,  $\mathcal{V}(q)$  è supposta di classe  $C^\infty$ , esiste una funzione  $R(q)$  tale che, se  $|q - q_0| \leq 1$ :

$$\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(q_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} (q_i - q_{0i})(q_j - q_{0j}) + R(q) \quad (2.2.5)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j}(q_0) \quad , \quad |R(q)| \leq k|q - q_0|^3 \quad (2.2.6)$$

dove  $k$  è una costante opportuna e  $\{c_{ij}\}$  è una matrice definita positiva.

Supponiamo ora che  $T(\dot{q}(0), q(0)) \leq \varepsilon$  e che  $|q(0) - q_0| \leq \delta_1(\varepsilon) \leq 1$ , con  $\delta_1(\varepsilon)$  abbastanza piccolo perchè sia  $\mathcal{V}(q(0)) \leq \mathcal{V}(q_0) + \varepsilon$ . Per la conservazione dell'energia, vedi (2.1.12), si può allora affermare che,  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$T(\dot{q}(t), q(t)) + \mathcal{V}(q(t)) \leq \mathcal{V}(q_0) + 2\varepsilon \quad (2.2.7)$$

Poiché  $T$  è non negativa, la (2.2.5) e la (2.2.7) implicano che

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} (q_i(t) - q_{0i})(q_j(t) - q_{0j}) + R(q(t)) \leq 2\varepsilon \quad (2.2.8)$$

D'altra parte, essendo la matrice  $\{c_{ij}\}$  definita positiva, esiste  $c > 0$ , tale che  $\sum_{ij} c_{ij} x_i x_j \geq c|x|^2$ . La (2.2.8) e la seconda delle (2.2.6) implicano allora che:

$$c|q(t) - q_0|^2 - k|q(t) - q_0|^3 \leq 2\varepsilon$$

Consideriamo allora l'insieme:

$$A_\varepsilon = \{q \in \mathbb{R}^l : c|q - q_0|^2 - k|q - q_0|^3 \leq 2\varepsilon\}$$

È facile vedere che, se  $\varepsilon < \varepsilon_0 = c/6(2c/3k)^2$ , la funzione  $f_\varepsilon(x) = cx^2 - kx^3 - 2\varepsilon$  ha due zeri sul semiasse positivo. Se  $\delta_2(\varepsilon)$  e  $d(\varepsilon)$ ,  $\delta_2(\varepsilon) \leq d(\varepsilon)$ , sono le posizioni dei due zeri, allora

$$A_\varepsilon = \{q \in \mathbb{R}^l : |q - q_0| \leq \delta_2(\varepsilon)\} \cup \{q \in \mathbb{R}^l : |q - q_0| \geq d(\varepsilon)\}$$

Poiché la funzione  $q(t)$  è continua,  $q(t)$  deve rimanere nella componente connessa di  $A_\varepsilon$  in cui si trova inizialmente. Pertanto, se  $\varepsilon < \varepsilon_0$  e

$$|q(0) - q_0| \leq \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$$

allora

$$|q(t) - q_0| \leq \delta_2(\varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

■

## 2.3 Linearizzazione

Consideriamo l'equazione differenziale normale del primo ordine

$$\dot{x} = F(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.3.1)$$

e supponiamo che  $\bar{x}_0$  sia un punto di equilibrio, cioè che

$$F(\bar{x}_0) = 0$$

Possiamo allora scrivere (supponiamo  $\bar{x}_0 = 0$  per comodità):

$$F(x) = Ax + R(x) \quad (2.3.2)$$

dove  $A$  è una matrice opportuna ( $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0)$ ) e

$$\sup_{|x| \leq \rho} |R(x)| \leq M_\rho |x|^2 \quad (2.3.3)$$

con  $M_\rho$  una funzione positiva di  $\rho$ , che possiamo supporre non decrescente.

Sia  $x(t)$  la soluzione della (2.3.1) che soddisfa la condizione iniziale:

$$x(0) = x_0$$

Vogliamo confrontare  $x(t)$  con la soluzione  $y(t)$  dell'equazione *linearizzata*:

$$\dot{y} = Ay \quad (2.3.4)$$

che soddisfa la stessa condizione iniziale:

$$y(0) = x_0$$

Studieremo questo problema, facendo ricorso essenziale alla seguente proposizione, nota come *Lemma di Gronwall*.

**Proposizione 2.3.1** *Se  $\Phi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , è una funzione continua, tale che*

$$\Phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t ds \Phi(s) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3.5)$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti reali,  $\beta \geq 0$ , allora

$$\Phi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3.6)$$

**Dim.** - Poniamo:

$$J(t) = \beta \int_0^t ds \Phi(s) \quad (2.3.7)$$

Usando la (2.3.5) e la positività di  $\beta$ , si ottiene:

$$\dot{J}(t) = \beta \Phi(t) \leq \alpha \beta + \beta J(t) \quad (2.3.8)$$

da cui segue:

$$e^{-\beta s} [\dot{J}(s) - \beta J(s)] \leq \alpha \beta e^{-\beta s} \quad (2.3.9)$$

La (2.3.9) può risciversi:

$$\frac{d}{ds} [e^{-\beta s} J(s)] \leq \alpha \beta e^{-\beta s} \quad (2.3.10)$$

Questa diseguaglianza, integrata fra 0 e  $t$ , dà, usando il fatto che  $J(0) = 0$ :

$$e^{-\beta t} J(t) \leq \alpha \beta \int_0^t e^{-\beta s} ds = \alpha (1 - e^{-\beta t}) \quad (2.3.11)$$

cioè

$$J(t) \leq \alpha e^{\beta t} - \alpha \quad (2.3.12)$$

da cui segue la (2.3.6), usando la (2.3.5) e la (2.3.7). ■

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione seguente.

**Proposizione 2.3.2** *Dati  $T > 0$  e  $0 \leq \eta < 1$ , esiste  $\delta(\eta, T) > 0$ , tale che, se  $|x_0| < \delta$ , allora  $x(t)$  e  $y(t)$  sono definite per  $t \in [0, T]$  e*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| \leq \delta^{1+\eta} \quad (2.3.13)$$

**Dim.** - La soluzione della (2.3.1) può scriversi nella forma:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ds[Ax(s) + R(x(s))] \quad (2.3.14)$$

Supponiamo ora che  $|x_0| \leq 1/2$  e definiamo:

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq 1\} \quad (2.3.15)$$

$T_1$  rappresenta il tempo necessario perchè la traiettoria raggiunga il bordo della sfera unitaria centrata nel punto di equilibrio (se questo non avviene,  $T_1 = +\infty$ ). Vogliamo far vedere che, se  $|x_0|$  è abbastanza piccolo,  $T_1 \geq T$ ; ciò assicura, fra l'altro, che una soluzione con dato iniziale vicino al punto di equilibrio ha un intervallo di definizione comprendente  $[0, T]$ . La (2.3.14) e la (2.3.3) implicano che, se  $t \in [0, T_1]$ :

$$|x(t)| \leq |x_0| + c \int_0^t ds|x(s)| + M_1 \int_0^t ds|x(s)|^2 \quad (2.3.16)$$

dove  $c$  è una costante opportuna dipendente dalla matrice  $A$  e si è usato il fatto che  $|x(s)| \leq 1$  per  $s \in [0, T_1]$ . Questa osservazione implica anche che  $|x(s)|^2 \leq |x(s)|$ , per  $s \in [0, T_1]$ . Pertanto:

$$|x(t)| \leq |x_0| + (c + M_1) \int_0^t ds|x(s)| \quad (2.3.17)$$

Usando il Lemma di Gronwall, si ha:

$$|x(t)| \leq |x_0|e^{(c+M_1)t}, \quad 0 \leq t \leq T_1 \quad (2.3.18)$$

La (2.3.18) e la definizione di  $T_1$  implicano subito che  $T_1 \geq T$ , purchè:

$$|x_0|e^{(c+M_1)T} < 1 \quad (2.3.19)$$

Consideriamo ora la soluzione della (2.3.4). Si ha:

$$y(t) = x_0 + \int_0^t ds Ay(s) \quad (2.3.20)$$

Pertanto

$$|y(t)| \leq |x_0| + c \int_0^t ds|y(s)|$$

e dal Lemma di Gronwall segue che  $|y(t)| \leq |x_0|e^{ct}$  e quindi anche che  $y(t)$  è definita per ogni valore di  $t$ .

La (2.3.14), la (2.3.20) e la (2.3.19) implicano che, se  $t \in [0, T]$ :

$$|x(t) - y(t)| \leq c \int_0^t ds|x(s) - y(s)| + M_1 T \sup_{0 \leq s \leq T} |x(s)|^2 \quad (2.3.21)$$

Per il Lemma di Gronwall e la (2.3.18):

$$|x(t) - y(t)| \leq M_1 T |x_0|^2 e^{2(c+M_1)T+cT} \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3.22)$$

Supponiamo ora che  $|x_0| < \delta$ . Perchè la (2.3.13) sia soddisfatta basta che:

$$M_1 T \delta^2 e^{(3c+2M_1)T} \leq \delta^{1+\eta}$$

cioè che

$$\delta \leq \left[ \frac{1}{M_1 T} e^{-(3c+2M_1)T} \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \equiv \delta_1(\eta, T)$$

La (2.3.13) è allora dimostrata, pur di definire:

$$\delta(\eta, T) = \min \left\{ \frac{1}{2}, e^{-(c+M_1)T}, \delta_1(\eta, T) \right\} \quad (2.3.23)$$

■

In generale le proprietà asintotiche delle soluzioni della (2.3.1) e della sua linearizzazione (2.3.4) sono diverse. C'è tuttavia un caso notevole in cui ciò non succede, cioè quello in cui gli autovalori della matrice  $A$  hanno tutti parte reale negativa.

Supponiamo, per semplicità, che gli autovalori di  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , siano a due a due distinti ed indichiamo con  $\psi^{(i)}$  una scelta qualunque degli autovettori corrispondenti:

$$A\psi^{(i)} = \lambda_i \psi^{(i)} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

La soluzione della (2.3.5) può allora scriversi:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} c_i \psi^{(i)} \quad (2.3.24)$$

le costanti  $c_i$  essendo esprimibili in funzione di  $y(0)$  tramite una trasformazione lineare.

Supponiamo ora che,  $\forall i$ :

$$Re \lambda_i \leq -\mu \quad , \quad \mu > 0 \quad (2.3.25)$$

Dalla (2.3.24) segue allora immediatamente che esiste una costante  $\gamma > 0$  tale che

$$|y(t)| \leq \gamma e^{-\mu t} |y(0)| \quad (2.3.26)$$

Vogliamo dimostrare che la stessa proprietà vale per le soluzioni della (2.3.1) con condizione iniziale vicina al punto di equilibrio.

Per farlo ci sarà comodo utilizzare una rappresentazione delle soluzioni della (2.3.4) diversa dalla (2.3.24).

Data una matrice quadrata  $B$  di ordine  $n$ , si definisce esponenziale di  $B$  la matrice

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n \quad , \quad B^0 \equiv I \quad (2.3.27)$$

Usando la (2.3.27) è molto facile dimostrare che

$$y(t) = e^{tA} x_0 \quad (2.3.28)$$

è la soluzione della (2.3.5) con dato iniziale  $y(0) = x_0$ . Infatti è facile provare che la serie a secondo membro della (2.3.27) è derivabile termine a termine e pertanto

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n x_0 \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} B^n x_0 = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n x_0$$

Di qui segue, per verifica diretta, che la soluzione della (2.3.1) con condizione iniziale  $x(0) = x_0$  soddisfa l'equazione integrale:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t ds e^{(t-s)A} R(x(s)) \quad (2.3.29)$$

**Definizione 2.3.1** *Un punto di equilibrio  $\bar{x}_0$  si dice stabile se,  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$ , dipendente solo da  $\varepsilon$ , così che  $\sup_{t \geq 0} |x(t) - x_0| < \varepsilon$ , se  $|x(0) - x_0| < \delta$ . Un punto di equilibrio  $\bar{x}_0$  si dice attrattivo se esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che, se  $x(0) \in U$ , allora*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

*. Un punto di equilibrio  $\bar{x}_0$  si dice asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo.*

Siamo finalmente in grado di formulare la seguente proposizione, nota come *Teorema di Lyapounov*.

**Proposizione 2.3.3** *Se gli autovalori della matrice  $A$  della (2.3.2) hanno tutti parte reale negativa, allora lo 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione (2.3.1).*

**Dim.** - Sia  $|x_0| \leq \varepsilon/2$ , con  $\varepsilon < 1$ , e sia  $T = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq \varepsilon\}$ ;  $T$  è ovviamente diverso da zero. Dalle (2.3.3), (2.3.26) e (2.3.29) segue che, se  $t \in [0, T]$ :

$$|x(t)| \leq \gamma e^{-\mu t} |x_0| + M_1 \gamma \int_0^t ds e^{-\mu(t-s)} |x(s)|^2$$

Se poniamo  $z(t) = |x(t)|e^{\mu t}$  ed usiamo il fatto che  $|x(s)| \leq \varepsilon$ , possiamo scrivere

$$z(t) \leq \gamma |x_0| + \varepsilon M_1 \gamma \int_0^t ds z(s)$$

Questa diseuguaglianza implica, per il Lemma di Gronwall e la definizione di  $z(t)$ , che

$$|x(t)| \leq \gamma|x_0|e^{-(\mu-\varepsilon M_1\gamma)t} \quad (2.3.30)$$

Se si sceglie  $\varepsilon$  così che  $\varepsilon M_1\gamma < \mu/2$ , si ha:

$$|x(t)| \leq \gamma|x(0)|e^{-\mu t/2} \quad (2.3.31)$$

Di qui segue subito che, se  $|x(0)|$  è sufficientemente piccolo,  $|x(t)| < \varepsilon$  per ogni  $t \in [0, T]$ ; ciò è possibile solo se  $T = \infty$ . La (2.3.31) implica allora che  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ . ■

## 2.4 Equazioni di Lagrange: esempi

**Esempio 2.4.1** *Si consideri il sistema (normalmente chiamato bipendolo) costituito da due sbarrette rigide  $OA$  e  $AB$ , di lunghezza rispettivamente  $l_1$  e  $l_2$  ed incernierate in  $A$ , vincolato a muoversi in un piano verticale con il punto  $O$  fisso (vedi figura). Le due sbarrette, di massa rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ , sono supposte omogenee e le sole forze attive che agiscono sul sistema sono le forze gravitazionali; i vincoli sono supposti ideali.*

- a) *Scrivere le equazioni di Lagrange.*
- b) *Studiare le posizioni di equilibrio.*
- c) *Studiare i modi normali del sistema linearizzato intorno all'unica posizione di equilibrio stabile.*

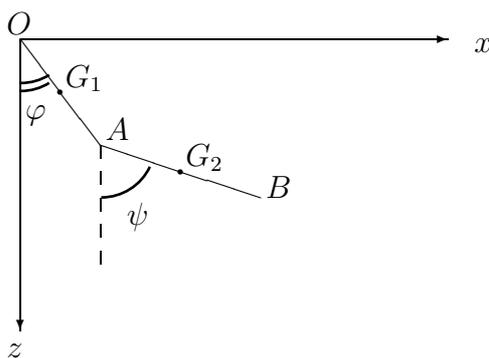


Figura 13: Coordinate lagrangiane per il bipendolo.

**Soluzione** - Indichiamo con  $l_1$  e  $l_2$  le lunghezze delle due sbarrette, con  $m_1$  e  $m_2$  le rispettive masse. Siano inoltre  $I_1$  il momento di inerzia di  $OA$  rispetto a  $O$  e  $I_2$  quello di  $AB$  rispetto al suo baricentro  $G_2$ .

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli  $\varphi$  e  $\psi$ . L'energia cinetica della sbarretta  $OA$  (dovuta al moto rotatorio intorno ad  $O$ ) è allora:

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2$$

e l'energia cinetica della sbarretta  $AB$  è (si usa il Teorema di König):

$$T_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{z}_{G_2}^2)$$

con

$$x_{G_2} = l_1 \sin \varphi + \frac{l_2}{2} \sin \psi$$

$$z_{G_2} = l_1 \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \cos \psi$$

Pertanto

$$\dot{x}_{G_2} = l_1\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{l_2}{2}\dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{z}_{G_2} = -l_1\dot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l_2}{2}\dot{\psi} \sin \psi$$

da cui segue:

$$T_2 = \frac{1}{2}(I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)$$

Per l'energia cinetica totale del sistema si ha allora l'espressione:

$$T = \frac{1}{2}(I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(I_1 + m_2 l_1^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) \quad (2.4.1)$$

L'energia potenziale è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g z_{G_1} - m_2 g z_{G_2} = \\ &= -g(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 l_1) \cos \varphi - g m_2 \frac{l_2}{2} \cos \psi \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

a) Equazioni di Lagrange.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 + m_2 l_1^2)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4})\dot{\psi} + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin(\varphi - \psi)$$

Se si inseriscono queste espressioni nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad , \quad q = \varphi, \psi$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} g_{11}\ddot{\varphi} + g_{12}\ddot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + g_{12}\dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) &= -k_1 \sin \varphi \\ g_{22}\ddot{\psi} + g_{12}\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \psi) - g_{12}\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) &= -k_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

dove

$$\begin{cases} g_{11} = I_1 + m_2 l_1^2 \\ g_{12} = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \\ g_{22} = I_2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = g(\frac{1}{2} m_1 l_1 + m_2 l_1) \\ k_2 = \frac{1}{2} g m_2 l_2 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

b) Posizioni di equilibrio.

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \sin \psi = 0$$

Ci sono pertanto quattro posizioni di equilibrio, corrispondenti ai seguenti valori della coppia  $(\varphi, \psi)$ :

$$(0, 0) \quad , \quad (\pi, 0) \quad , \quad (0, \pi) \quad , \quad (\pi, \pi)$$

Per studiarne la stabilità, calcoliamo la matrice hessiana  $H_V(\varphi, \psi)$  di  $V(\varphi, \psi)$ . Si trova:

$$H_V(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} k_1 \cos \varphi & 0 \\ 0 & k_2 \cos \psi \end{pmatrix}$$

L'unico punto in cui  $H_V$  sia definita positiva è  $(0, 0)$ , che è pertanto un punto di equilibrio stabile. Tutti gli altri punti di equilibrio sono instabili, in quanto almeno un autovalore di  $H_V$  è negativo.

c) Linearizzazione intorno a  $(0, 0)$ .

La linearizzazione delle equazioni (2.4.3) si ottiene sostituendo nelle equazioni di Lagrange  $T$  e  $V$  con i corrispondenti sviluppi di Taylor troncati al secondo ordine nelle variabili  $\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ . Se indichiamo con  $\tilde{T}$  e  $\tilde{V}$  i suddetti sviluppi di Taylor, si trova, trascurando una costante additiva inessenziale in  $\tilde{V}$ :

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, G \dot{\mathbf{q}} \rangle \quad , \quad \tilde{V} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, K \mathbf{q} \rangle$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  rappresenta il prodotto scalare usuale,  $\mathbf{q}$  rappresenta il vettore  $(\varphi, \psi)$  e le due matrici  $G$  e  $K$  sono definite in termini delle costanti introdotte nella (2.4.4) nel modo seguente:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Per diagonalizzare la lagrangiana, dobbiamo risolvere il problema agli autovalori:

$$K\mathbf{h} = \lambda G\mathbf{h}$$

Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione del secondo ordine

$$\det(K - \lambda G) = (k_1 - \lambda g_{11})(k_2 - \lambda g_{22}) - \lambda^2 g_{12}^2 = 0$$

Indichiamo con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le due soluzioni di questa equazione, che sono certamente reali e strettamente positive, in quanto le due matrici  $K$  e  $G$  sono definite positive; indichiamo inoltre con  $\mathbf{h}^1$  e  $\mathbf{h}^2$  una scelta qualunque degli autovettori corrispondenti, fatta in modo che essi siano reali. Poichè  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , come è facile verificare,  $\mathbf{h}^1$  e  $\mathbf{h}^2$  sono una base in  $\mathbb{R}^2$ ; è pertanto possibile associare in modo univoco ad ogni vettore  $\mathbf{q}$  un vettore  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$ , così che:

$$\mathbf{q} = Q_1\mathbf{h}^1 + Q_2\mathbf{h}^2 = S\mathbf{Q} \quad (2.4.5)$$

dove  $S$  è la matrice di elementi  $S_{ij} = \mathbf{h}_i^j$ .

$Q_1$  e  $Q_2$  possono essere assunte come nuove variabili lagrangiane e le equazioni del moto corrispondenti si scrivono:

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i \quad , \quad i = 1, 2$$

Le soluzioni sono delle sinusoidi di pulsazione  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ , di ampiezza e fase dipendenti nel modo ben noto dalle condizioni iniziali sulle variabili  $Q_i$ ; queste ultime si ottengono facilmente da  $\mathbf{q}(0)$  e  $\dot{\mathbf{q}}(0)$  invertendo le (2.4.5).

**Esempio 2.4.2** *Tre punti materiali  $A, B, C$  di massa  $m$  sono vincolati a muoversi in un piano verticale  $\Pi$  di origine  $O$  in modo che le distanze  $OA, OB, BC, AC$  siano fisse e tutte eguali a  $l$ . Il piano  $\Pi$  può solo ruotare intorno all'asse  $z$  ed il punto  $C$  è vincolato all'asse  $z$ . Tutti i vincoli sono da supporre ideali.*

- a) *Scrivere la lagrangiana del sistema, usando come variabili lagrangiane l'angolo  $\theta$  che il segmento  $OA$  forma con l'asse  $z$  e l'angolo  $\psi$  che il piano  $\Pi$  forma con l'asse  $x$ .*
- b) *Scrivere l'integrale primo corrispondente alla variabile ciclica presente nella lagrangiana, nel seguito chiamato  $J$ , e far vedere che esso corrisponde al momento della quantità di moto rispetto all'asse  $z$ .*
- c) *Usando il risultato del punto b) e la conservazione dell'energia, far vedere che, se  $J \neq 0$ , la funzione  $\theta(t)$  è in generale periodica e, per un particolare valore dell'energia dipendente da  $J$ , addirittura costante; scrivere inoltre l'espressione integrale del periodo.*

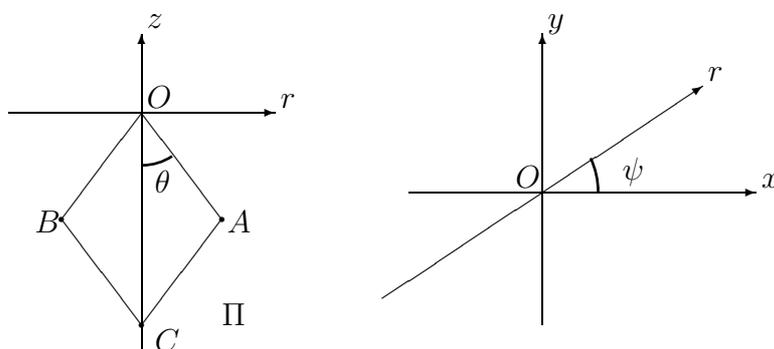


Figura 14: Coordinate lagrangiane del sistema.

### Soluzione

a) Se indichiamo con  $\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$  la posizione del generico punto  $P$ , dalla Fig. 14 segue facilmente che

$$\begin{aligned}
 x_A = -x_B &= r \cos \psi = l \sin \theta \cos \psi \\
 y_A = -y_B &= r \sin \psi = l \sin \theta \sin \psi \\
 z_A = z_B &= -l \cos \theta \\
 x_C = y_C &= 0 \\
 z_C &= -2l \cos \theta
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Si noti che, per  $\theta = \pi/2$ , queste condizioni non sono equivalenti ai vincoli enunciati, che potrebbero essere tutti soddisfatti anche se i punti  $A$  e  $B$  non sono alla stessa altezza; in tale configurazione, infatti,  $C$  coincide con  $O$  e appartiene alla retta passante per  $A$  e  $B$ , che potrebbe formare un angolo arbitrario con la retta  $r$ . Tuttavia è evidente che nessun moto continuo potrebbe passare per la configurazione corrispondente a  $\theta = \pi/2$ , violando la condizione  $z_A = z_B$ . Pertanto non è restrittivo immaginare che i vincoli siano definiti in generale dalle condizioni (2.4.6).

Prima di proseguire, è utile osservare che le configurazioni delle particelle  $A$ ,  $B$  e  $C$  che soddisfano le condizioni (2.4.6) non sono in corrispondenza biunivoca con nessun aperto nelle variabili  $\theta$  e  $\psi$ , che contenga punti con  $\theta = 0$ ; ciò segue dal fatto che, se tutte e tre le particelle sono sull'asse  $z$ , l'angolo  $\psi$  non è definito in termini delle sole posizioni dei tre punti. Sembrerebbe quindi che  $\theta$  e  $\psi$  non possano essere assunte come variabili lagrangiane nell'intorno di qualunque configurazione del sistema compatibile con i vincoli. Tuttavia, il sistema che vogliamo qui considerare è uno in cui tutti i punti sono vincolati ad un piano assegnato, libero di ruotare intorno all'asse  $z$ ; pertanto l'angolo  $\psi$  è definito indipendentemente da  $\theta$  ed i due angoli sono

sicuramente delle buone variabili lagrangiana nell'intorno di qualunque punto del toro bidimensionale. Per risolvere l'apparente paradosso, bisognerebbe aggiungere all'insieme di punti un punto qualunque  $D$  del piano  $\Pi$  che non sia sull'asse  $z$  ed allargare il sistema di condizioni (4.3.14), aggiungendo le due condizioni che fissano la posizione di  $D$  su  $\Pi$  e, per esempio, la condizione di complanareità di  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Tuttavia, poiché il punto  $D$  è privo di massa, questa modifica non porterebbe alcun cambiamento nei calcoli successivi.

Le (4.3.14) implicano che

$$\begin{aligned} \dot{x}_A = -\dot{x}_B &= l\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - l\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{y}_A = -\dot{y}_B &= l\dot{\theta} \cos \theta \sin \psi + l\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{z}_A = \dot{z}_B &= l\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_C = \dot{y}_C &= 0 \\ \dot{z}_C &= 2l\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

L'energia cinetica  $T$  del sistema è allora data dall'espressione:

$$T = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 \quad (2.4.8)$$

Per l'energia potenziale  $V$  si trova:

$$V = mg(z_A + z_B + z_C) = -4mgl \cos \theta \quad (2.4.9)$$

La lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema è pertanto data dalla:

$$\mathcal{L} = ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + 4mgl \cos \theta \quad (2.4.10)$$

b) Poichè  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\psi$ , dalla (2.4.10) segue che

$$J \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} \quad (2.4.11)$$

è una costante del moto.

Sia  $M_z$  il momento della quantità di moto rispetto all'asse  $z$ . Poichè  $\dot{\vec{r}}_C$  è diretto come l'asse  $z$ , usando le (2.4.7) si trova, se  $\vec{e}_3$  è il versore dell'asse  $z$ :

$$\begin{aligned} M_z &= m(\vec{r}_A \wedge \dot{\vec{r}}_A + \vec{r}_B \wedge \dot{\vec{r}}_B) \cdot \vec{e}_3 = 2m(\vec{r}_A \wedge \dot{\vec{r}}_A) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= 2m(x_A \dot{y}_A - y_A \dot{x}_A) = 2ml^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} = J \end{aligned}$$

c) Detta  $E$  l'energia del sistema, si ha, usando la (2.4.8) e la (2.4.9):

$$ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E \quad (2.4.12)$$

dove

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{J^2}{4ml^2 \sin^2 \theta} - 4mg \cos \theta \quad (2.4.13)$$

La funzione  $\theta(t)$  soddisfa pertanto un integrale primo dello stesso tipo di quello che si trova nello studio dei moti unidimensionali conservativi; l'unica differenza è che il coefficiente di  $\dot{\theta}^2$  non è costante, ma dipende esplicitamente da  $\theta$ . Si noti tuttavia che

$$0 < 1 \leq 1 + 2 \sin^2 \theta \leq 3$$

per cui questa differenza non ha alcuna rilevanza nell'analisi qualitativa dei moti, che si può pertanto effettuare come nel caso dei moti unidimensionali conservativi. In realtà c'è da verificare un'altra proprietà, che è essenziale in questa analisi; ci riferiamo alla proprietà per cui, se all'istante  $\bar{t}$  si ha che

$$\theta(\bar{t}) = \bar{\theta} \quad , \quad V_{eff}(\bar{\theta}) = E \quad , \quad \frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta}(\bar{\theta}) \neq 0$$

allora, oltre alla  $\dot{\theta}(\bar{t}) = 0$ , è verificata anche la  $\ddot{\theta}(\bar{t}) \neq 0$ . Ciò tuttavia segue subito dall'equazione di Lagrange per  $\theta(t)$ , che è della forma:

$$ml^2(2 + 4 \sin^2 \theta)\ddot{\theta} + 2ml^2 \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta}(\theta)$$

L'analisi qualitativa della funzione  $\theta(t)$  si riduce pertanto a studiare il grafico della funzione  $V_{eff}(\theta)$ .

Se  $J \neq 0$ ,  $V_{eff}(\theta) \rightarrow +\infty$  se  $\theta \rightarrow 0^+$  oppure  $\theta \rightarrow \pi^-$ ; ciò implica innanzi tutto che, per ogni valore dell'energia, esistono  $\theta_1 > 0$  e  $\theta_2 < \pi$ , tali che, per ogni  $t$ :

$$\theta_1 < \theta(t) < \theta_2$$

Inoltre

$$V'_{eff}(\theta) = -\frac{J^2 \cos \theta}{2ml^2 \sin^3 \theta} + 4mg \sin \theta = 0$$

implica che

$$\tan \theta = \frac{J^2}{8ml^2 g \sin^3 \theta}$$

Se si disegnano i grafici dei due membri di questa equazione nell'intervallo  $(0, \pi)$ , si vede subito che essi possono intersecarsi solo in un punto, la cui ascissa indicheremo con  $\theta_0$ ; inoltre  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . Ne segue immediatamente che il grafico di  $V_{eff}(\theta)$  è del tipo di quello disegnato in Fig. 15; pertanto tutti i moti sono periodici rispetto alla variabile  $\theta$ .

Se  $E = V_{eff}(\theta_0)$ , si ha addirittura:

$$\theta(t) = \theta_0 \quad \forall t$$

Dalla (2.4.11) si ha allora:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta_0} \quad \forall t$$

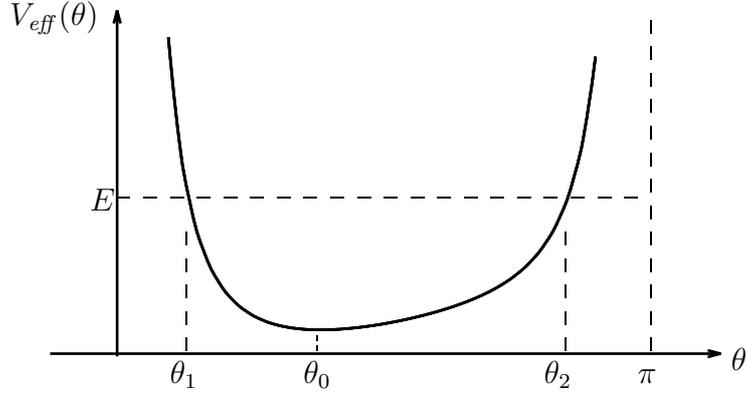


Figura 15: Grafico del potenziale efficace.

per cui il sistema ruota rigidamente (poichè  $\theta$  è costante) intorno all'asse  $z$  con velocità angolare costante.

Se  $E > V_{eff}(\theta_0)$ , il moto del sistema è invece in generale solo quasiperiodico e consiste in una oscillazione nel piano  $\Pi$ , di periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{\frac{ml^2(1 + 2 \sin^2 \theta)}{E - V_{eff}(\theta)}} \quad (2.4.14)$$

accompagnata da una rotazione non uniforme intorno all'asse  $z$  di velocità angolare

$$\dot{\psi}(t) = \frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta(t)} \quad (2.4.15)$$

Il secondo periodo del moto quasiperiodico può essere dedotto dalla (2.4.15) come nel caso del problema dei due corpi ed è eguale a:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \dot{\psi}(t) \quad (2.4.16)$$

Infatti la soluzione della (2.4.15) si può scrivere nella forma:

$$\psi(t) = \psi(0) + \omega_2 t + S(t)$$

dove

$$S(t) = \int_0^t ds \left[ \frac{J}{2ml^2 \sin^2 \theta(s)} - \omega_2 \right]$$

è una funzione periodica di periodo  $T_1$ , in quanto primitiva di una funzione periodica a media nulla.

Si consideri allora, ad esempio, la variabile  $x_A$ ; la sua variazione temporale è espressa dalla funzione

$$x_A(t) = l \sin \theta(t) \cos \psi(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t)$$

con

$$F(\alpha, \beta) = l \sin\left[\theta\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right)\right] \cos\left[\psi(0) + \beta + S\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\right)\right]$$

che è evidentemente una funzione delle due variabili indipendenti  $\alpha$  e  $\beta$ , periodica di periodo  $2\pi$  sia in  $\alpha$  che in  $\beta$ .

## 2.5 Esempio di vincolo approssimato ideale

Sia dato un arco di curva regolare  $\mathcal{C}$  nel piano  $xy$ , di classe  $C^\infty$ , passante per l'origine  $O$ ; se si sceglie l'ascissa curvilinea  $s$  (riferita all'origine) come parametro, la curva è descritta da equazioni parametriche del tipo

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) , \\ y &= \psi(s) , \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

con  $\varphi(s)$  e  $\psi(s)$  funzioni regolari tali che

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1 , \tag{2.5.2}$$

definite in un intervallo  $I$ , che non è restrittivo supporre della forma  $I = [-L, L]$ .

Sia ora  $U_R = I \times [-R, R]$  e consideriamo l'applicazione  $\Phi$  di  $U_R$  nel piano  $xy$  definita dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) - r\psi'(s) , \\ y &= \psi(s) + r\varphi'(s) . \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Vogliamo far vedere che questa applicazione, la cui immagine  $\Phi(U_R)$  contiene la curva  $\mathcal{C}$ , è invertibile, se  $R$  è abbastanza piccolo.

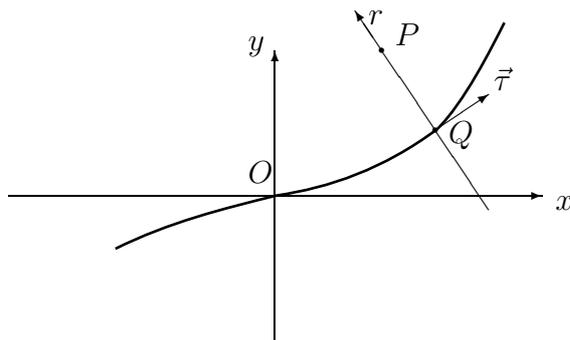


Figura 16: Asse dell'ascissa  $r$ .

Indichiamo con  $Q(s)$  il punto della curva di ascissa curvilinea  $s$  ed osserviamo che, essendo

$$\vec{\tau}(s) = (\varphi'(s), \psi'(s)) ,$$

il versore della tangente alla curva nel punto  $Q(s)$ , il vettore

$$\vec{n}(s) = (-\psi'(s), \varphi'(s))$$

è il versore della normale in  $Q(s)$  orientata verso il semipiano superiore. Dati  $s$  ed  $r$ , le (2.5.3) sono allora le coordinate di un punto  $P$  della normale, di ascissa  $r$  (vedi figura).

Perchè le (2.5.3) siano invertibili in  $U_R$  con inversa regolare, è sufficiente che il loro Jacobiano  $J(r, s)$  sia diverso da zero in tutto  $U_R$ ; si ha:

$$\begin{aligned} J(r, s) &= (\varphi' - r\psi'')\varphi' + \psi'(\psi' + r\varphi'') = 1 + r(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi') \\ &\geq 1 - RM_1, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

dove  $M_1$  è una stima delle derivate prime e seconde di  $\varphi$  e  $\psi$  in  $[-L, L]$ . Basta allora scegliere

$$R < \frac{1}{M_1},$$

perchè sia  $J(r, s) > 0$  in  $U_R$ .

Possiamo pertanto utilizzare  $s$  e  $r$  come coordinate lagrangiane per descrivere i moti che si svolgono in  $\Phi(U_R)$  di una particella puntiforme di massa  $m$ . Dalle (2.5.3) segue che, per un moto generico,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\varphi' - r\psi'')\dot{s} - \psi'\dot{r}, \\ \dot{y} &= (\psi' + r\varphi'')\dot{s} + \varphi'\dot{r}. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Pertanto l'energia cinetica, espressa in funzione di  $s, r, \dot{s}, \dot{r}$ , assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2[1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad (2.5.6)$$

avendo utilizzato il fatto che, per la (2.5.2),

$$\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\varphi'^2 + \psi'^2) = 0$$

ed avendo definito:

$$a(r, s) = 2\varphi''(s)\psi'(s) - 2\varphi'(s)\psi''(s) + r[\psi''(s)^2 + \varphi''(s)^2]. \quad (2.5.7)$$

Ovviamente esiste  $M_2 > 0$  tale che, se  $(s, r) \in U_R$ ,

$$|a(r, s)| \leq M_2. \quad (2.5.8)$$

Supponiamo che la particella sia vincolata a muoversi lungo la curva  $\mathcal{C}$  in assenza di attrito, sotto l'azione di una forza attiva conservativa di potenziale  $\mathcal{V}_0(r, s)$ , regolare in  $U_R$ . Il suo moto è allora descritto dalla funzione  $s_0(t)$  che soddisfa l'equazione di Lagrange associata alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \mathcal{V}_0(0, s)$$

Si ha pertanto:

$$m\ddot{s}_0 = -\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s) . \quad (2.5.9)$$

Supponiamo ora che non sia presente alcun vincolo, ma che la particella sia soggetta ad una forza conservativa di potenziale

$$\mathcal{V}_\lambda(r, s) = \mathcal{V}_0(r, s) + \lambda W(r) , \quad (2.5.10)$$

dove  $W(r)$  è una funzione non negativa, che ha in  $r = 0$  un minimo in senso stretto, con

$$W(0) = 0 .$$

Il moto è allora descritto dalle funzioni  $r_\lambda(t)$  e  $s_\lambda(t)$  che soddisfano le equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2[1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \mathcal{V}_0(r, s) - \lambda W(r) . \quad (2.5.11)$$

Ci proponiamo di dimostrare che la terna  $(\mathcal{C}, W, \lambda)$  è un *modello di vincolo approssimato ideale*, secondo la definizione introdotta nel cap. 3 del testo di Gallavotti. Ciò segue dalla proposizione seguente:

**Proposizione 2.5.1** *Siano  $r_\lambda(t)$  e  $s_\lambda(t)$ ,  $t \in [0, T_\lambda]$ , le soluzioni delle equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana (2.5.11), con condizioni iniziali:*

$$r_\lambda(0) = 0 \quad , \quad \dot{r}_\lambda(0) = \eta \quad , \quad s_\lambda(0) = \bar{s} \quad , \quad \dot{s}_\lambda(0) = \alpha . \quad (2.5.12)$$

*Le condizioni iniziali e  $T_\lambda$  si suppongono scelti in modo che  $(r_\lambda(t), s_\lambda(t)) \in U_R$ . Esiste allora  $\bar{\lambda} > 0$ , tale che, se  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ :*

- a) *È possibile scegliere  $T_\lambda$  così che  $T_\lambda = T > 0$ ;*
- b)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\lambda(t) = 0$ ;
- c) *se  $s_0(t)$  è la soluzione della (2.5.9) con condizioni iniziali*

$$s_0(0) = \bar{s} \quad , \quad \dot{s}_0(0) = \alpha ,$$

*allora*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (|s_\lambda(t) - s_0(t)| + |\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)|) = 0 .$$

**Dim.** - Per la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{s}^2[1 + ra(r, s)] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{V}_0(r, s) + \lambda W(r) = \\ &= \frac{1}{2}m(\alpha^2 + \eta^2) + \mathcal{V}_0(0, \bar{s}) . \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Pertanto

$$\lambda W(r) \leq E + M_3 \quad , \quad M_3 \equiv -\min_{U_R} \mathcal{V}_0(r, s) .$$

Poichè  $E$  è indipendente da  $\lambda$  (grazie al fatto che  $r_\lambda(0) = 0$ ) e la funzione regolare  $W(r)$  ha in  $r = 0$  un minimo in senso stretto, esistono  $\bar{\lambda} > 0$  ed una funzione positiva  $\delta(\lambda)$ , infinitesima per  $\lambda \rightarrow \infty$ , tali che

$$|r_\lambda(t)| \leq \delta(\lambda) \leq R \quad , \quad \lambda \geq \bar{\lambda} . \quad (2.5.14)$$

Ciò prova il punto b).

Dalla (2.5.13) segue pure che

$$\frac{1}{2} m \dot{s}_\lambda^2 [1 + r_\lambda a(r_\lambda, s_\lambda)] \leq E + M_3 . \quad (2.5.15)$$

D'altra parte, usando la positività dell'energia cinetica, si può mostrare che, se  $(r, s) \in U_R$ ,

$$1 + ra(r, s) \geq M_4 > 0 . \quad (2.5.16)$$

Infatti, per la (2.5.5) e la (2.5.6),

$$1 + ra(r, s) = (\varphi' - r\psi'')^2 + (\psi' + r\varphi'')^2 \geq 0$$

ed il segno = può valere solo se  $\varphi' = r\psi''$  e  $\psi' = -r\varphi''$ , cioè se

$$r^2(\varphi''^2 + \psi''^2) = \varphi'^2 + \psi'^2 = 1 .$$

In tal caso tuttavia, usando la (2.5.4) e la (2.5.7), si ha:

$$1 + ra(r, s) = 1 + 2[J(r, s) - 1] + r^2(\varphi''^2 + \psi''^2) = 2J(r, s) > 0 ,$$

in contrasto con l'ipotesi che  $1 + ra(r, s) = 0$ .

Dalle (2.5.15) e (2.5.16) segue che

$$|\dot{s}_\lambda(t)| \leq \sqrt{\frac{2(E + M_3)}{mM_4}} \equiv M_5$$

e quindi che

$$|s_\lambda(t) - \bar{s}| = \left| \int_0^t d\tau \dot{s}_\lambda(\tau) \right| \leq |t| M_5 \leq L - |\bar{s}| , \quad (2.5.17)$$

cioè che  $s_\lambda(t) \in I$ , purchè sia

$$|t| \leq T = \frac{L - |\bar{s}|}{M_5} .$$

La (2.5.14) e la (2.5.17) provano il punto a).

Consideriamo ora l'equazione di Lagrange per la funzione  $s_\lambda(t)$ . Usando la (2.5.11), si ha:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{s}_\lambda(1+r_\lambda a)] = \frac{1}{2}m\dot{s}_\lambda^2 r_\lambda \frac{\partial a}{\partial s} - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}. \quad (2.5.18)$$

Integrando ambedue i membri della (2.5.18) fra 0 e  $t$ , si trova, dopo qualche passaggio,

$$\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_\lambda(0) = A(t) - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)), \quad (2.5.19)$$

avendo definito:

$$\begin{aligned} A(t) = & -\dot{s}_\lambda(t)r_\lambda(t)a(r_\lambda(t), s_\lambda(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \dot{s}_\lambda^2(\tau)r_\lambda(\tau) \frac{\partial a}{\partial s}(r_\lambda(\tau), s_\lambda(\tau)) - \\ & - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(r_\lambda(\tau), s_\lambda(\tau)) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

D'altra parte, per la regolarità di  $\mathcal{V}_0$ , esiste una costante  $M_6 > 0$  tale che, se  $(r, s) \in U_R$ ,

$$\left| \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(r, s) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s) \right| \leq M_6 r.$$

Mettendo insieme le varie stime precedenti è molto facile verificare che esiste una costante  $M_7 > 0$  tale che, se  $|t| \leq T$ ,

$$|A(t)| \leq M_7 \delta(\lambda). \quad (2.5.21)$$

Notiamo ora che la funzione  $s_0(t)$  soddisfa, per la (2.5.9), l'equazione

$$\dot{s}_0(t) - \dot{s}_0(0) = -\frac{1}{m} \int_0^t d\tau \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_0(\tau)). \quad (2.5.22)$$

Sottraendo la (2.5.22) dalla (2.5.19), si trova, usando il fatto che  $\dot{s}_\lambda(0) = \dot{s}_0(0)$ ,

$$\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t) = A(t) - \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_\lambda(\tau)) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_0(\tau)) \right]. \quad (2.5.23)$$

D'altra parte, per la regolarità del potenziale, esiste  $M_8 > 0$  tale che, se  $s_1, s_2 \in I$ ,

$$\frac{1}{m} \left| \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_1) - \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial s}(0, s_2) \right| \leq M_8 |s_1 - s_2|.$$

Questa diseuguaglianza, insieme alla (2.5.21) e alla (2.5.23), implicano che

$$|\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)| \leq M_7 \delta(\lambda) + M_8 \int_0^t d\tau |s_\lambda(\tau) - s_0(\tau)|. \quad (2.5.24)$$

Inoltre

$$|s_\lambda(t) - s_0(t)| = \left| \int_0^t d\tau [\dot{s}_\lambda(\tau) - \dot{s}_0(\tau)] \right| \leq \int_0^t |\dot{s}_\lambda(\tau) - \dot{s}_0(\tau)|, \quad (2.5.25)$$

per cui, posto

$$z(t) = |s_\lambda(t) - s_0(t)| + |\dot{s}_\lambda(t) - \dot{s}_0(t)|,$$

si ha, usando la (2.5.24) e la (2.5.25),

$$z(t) \leq M_7 \delta(\lambda) + (M_8 + 1) \int_0^t d\tau z(\tau).$$

Il lemma di Gronwall (vedi Prop. 2.3.1) implica allora che

$$z(t) \leq M_7 \delta(\lambda) e^{(M_8+1)T},$$

da cui segue immediatamente il punto c). ■

### 3 Cinematica relativa

#### 3.1 Cambiamenti di riferimento e trasformazioni ortogonali.

Cominciamo questo paragrafo richiamando alcune definizioni e proprietà ben note dei cambiamenti di riferimento, più che altro per fissare la notazione.

Un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  è definito dando un punto  $O$  dello spazio ed una terna ordinata di assi cartesiani ortogonali passanti per  $O$ ; un punto  $P$  dello spazio è allora individuato da un elemento  $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ , le cui componenti rappresentano le ascisse delle proiezioni di  $P$  sui tre assi (normalmente dette coordinate di  $P$  in  $\mathcal{S}$ ). Ad ogni sistema di riferimento è associato un orientamento nel modo usuale: si dice che l'orientamento è positivo, se ad un osservatore in piedi sul piano  $(q_1, q_2)$  appare come antiorario il verso della rotazione intorno all'asse  $q_3$  di una semiretta di origine  $O$  che vada dall'asse  $q_1$  all'asse  $q_2$  descrivendo un angolo convesso; in caso contrario si dice che l'orientamento è negativo.

Supponiamo di avere due sistemi di riferimento  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , di origine rispettivamente  $O$  e  $O'$ ; indichiamo con  $q^{(i)}$  e  $Q^{(i)}$  gli elementi di  $\mathbb{R}^3$  che individuano la posizione del punto  $P_i$  rispettivamente in  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ . Sia

$$q = M(Q)$$

la trasformazione di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  che descrive la relazione esistente fra le coordinate nei due sistemi di riferimento o, come suol dirsi, il *cambiamento di riferimento* da  $\mathcal{S}'$  a  $\mathcal{S}$ .

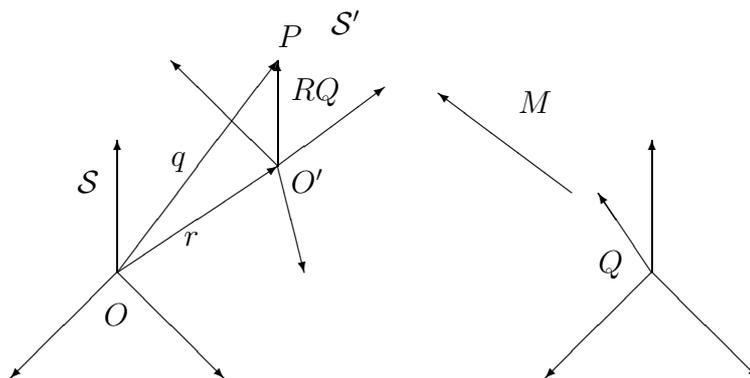


Figura 17: Esempio di cambiamento di riferimento.

Poichè il quadrato della distanza fra due punti qualunque dello spazio,

$P_1$  e  $P_2$ , è data in qualunque sistema di riferimento dalla somma dei quadrati delle differenze delle coordinate, la trasformazione  $M$  deve soddisfare,  $\forall Q^{(1)}, Q^{(2)} \in \mathbb{R}^3$ , la condizione:

$$|M(Q^{(1)}) - M(Q^{(2)})|^2 = |Q^{(1)} - Q^{(2)}|^2 \quad (3.1.1)$$

avendo definito, per ogni  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

Il verificarsi della (3.1.1) si suole esprimere dicendo che  $M$  è una *isometria*.

**Definizione 3.1.1** *Sia  $M$  una isometria. Se  $M(0) = 0$ ,  $M$  si dice una trasformazione ortogonale. Se esiste  $r \in \mathbb{R}^3$ , tale che  $M(Q) = Q + r$ ,  $\forall Q \in \mathbb{R}^3$ ,  $M$  si dice una traslazione.*

**Proposizione 3.1.1** *Ogni isometria  $M$  si può ottenere componendo una traslazione con una trasformazione ortogonale. Inoltre, se  $M$  è una trasformazione ortogonale,  $M$  è anche una trasformazione lineare, esiste cioè una matrice  $R$  tale che,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ ,*

$$M(x) = Rx \quad (3.1.2)$$

La matrice  $R$  gode di alcune importanti proprietà:

a)  $R$  è una matrice ortogonale, cioè

$$R^T = R^{-1} \quad (3.1.3)$$

avendo indicato con  $R^T$  e  $R^{-1}$  rispettivamente la matrice trasposta e la matrice inversa di  $R$ .

b)

$$\det R = \pm 1 \quad (3.1.4)$$

**Dim.** - La prima affermazione si dimostra immediatamente ponendo

$$\tilde{M}(x) = M(x) - M(0)$$

ed osservando che anche  $\tilde{M}$  soddisfa la (3.1.1).

Supponiamo ora che  $M$  sia una trasformazione ortogonale; per la (3.1.1) si ha:

$$|M(x)|^2 = |M(x) - M(0)|^2 = |x|^2 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1.5)$$

D'altra parte, se definiamo il prodotto scalare  $(x, y)$  fra due elementi di  $\mathbb{R}^3$ ,  $x$  e  $y$ , nel modo usuale, cioè

$$(x, y) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

sviluppando i quadrati in ambedue i membri della (3.1.1) ed usando la (3.1.5) si prova facilmente che

$$(M(x), M(y)) = (x, y) \quad (3.1.6)$$

Per provare che  $M$  è una trasformazione lineare, dobbiamo provare che, presi comunque due numeri reali  $\alpha$  e  $\beta$  e due elementi  $x$  e  $y$  di  $\mathbb{R}^3$ , si ha:

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha M(x) + \beta M(y) \quad (3.1.7)$$

cioè che

$$|M(\alpha x + \beta y) - \alpha M(x) - \beta M(y)|^2 = 0$$

il che si dimostra molto facilmente sviluppando il quadrato ed usando la (3.1.5) e la (3.1.6).

Se indichiamo con  $e^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gli elementi della base standard di  $\mathbb{R}^3$ , si ha:

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i e^{(i)}$$

e quindi, per la (3.1.7):

$$M(x) = \sum_{i=1}^3 x_i M(e^{(i)}) = \sum_{ij} R_{ji} x_i e^{(j)} = Rx$$

dove  $R$  è la matrice di elementi

$$R_{ji} = M(e^{(i)})_j \quad (3.1.8)$$

Per la (3.1.6) si ha allora:

$$(Rx, Ry) = (x, R^T Ry) = (x, y) \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

da cui segue

$$R^T R = I \quad (3.1.9)$$

avendo indicato con  $I$  la matrice identità. Ma  $R$  è certamente una matrice invertibile, poichè, per la (3.1.5),  $Rx = 0 \Rightarrow x = 0$ . Pertanto, moltiplicando i due membri della (3.1.9) a destra per  $R^{-1}$ , si ottiene la (3.1.3).

Il punto b) si prova eguagliando i determinanti dei due membri della (3.1.9):

$$\det(R^T R) = \det R^T \det R = (\det R)^2 = \det I = 1$$

■

La Prop. 3.1.1 implica che, dati due sistemi di riferimento come all'inizio del paragrafo, esistono  $r \in \mathbb{R}^3$  ed una matrice ortogonale  $R$ , tali che (vedi Fig. 17):

$$q = r + RQ \quad (3.1.10)$$

Prima di analizzare le conseguenze di questa equazione, discutiamo le proprietà delle trasformazioni ortogonali.

Poichè è evidente che ad ogni matrice ortogonale è associata una trasformazione ortogonale tramite la (3.1.2), l'insieme delle trasformazioni ortogonali può identificarsi con l'insieme delle matrici ortogonali. D'altra parte, con semplici argomenti geometrici si può mostrare che il cambiamento di riferimento associato a due sistemi di riferimento equiorientati può sempre realizzarsi con continuità; ciò significa che, detta  $\bar{R}$  la matrice corrispondente, esiste una funzione continua  $R(s)$  a valori nella famiglia delle matrici ortogonali, definita nell'intervallo  $[0, 1]$ , tale che  $R(0) = I$  e  $R(1) = \bar{R}$ . Poichè il determinante è una funzione continua degli elementi di matrice,  $\det R(s)$  è una funzione continua, eguale a 1 in  $s = 0$ ; la (3.1.4) implica d'altra parte che  $\det R(s)$  è costante, quindi  $\det \bar{R} = +1$ .

**Definizione 3.1.2** *Una trasformazione ortogonale, tale che la matrice  $R$  corrispondente ha determinante eguale a +1, si dice una rotazione, mentre  $R$  si dice matrice di rotazione. L'insieme delle matrici di rotazione verrà indicato con  $\mathcal{R}$ .*

Nel seguito considereremo solo sistemi di riferimento con orientazione positiva e quindi solo cambiamenti di riferimento descritti da rotazioni.

L'uso del nome di rotazione è giustificato dalla seguente proposizione, di solito ricordata come il *Teorema di Eulero*.

**Proposizione 3.1.2** *Se  $R \in \mathcal{R}$  e  $R \neq I$ , esiste  $\psi \in \mathbb{R}^3$ , diverso da 0 ed individuato a meno di una costante moltiplicativa, tale che*

$$R\psi = \psi$$

**Dim.** - Studiamo il problema agli autovalori per la matrice  $R$ , pensata come una trasformazione di  $\mathbb{C}^3$  in  $\mathbb{C}^3$ :

$$Rx = \lambda x \quad , \quad x \in \mathbb{C}^3 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.1.11)$$

Se definiamo il prodotto scalare  $(x, y)$  fra due elementi di  $\mathbb{C}^3$ ,  $x$  e  $y$ , nel modo usuale, cioè

$$(x, y) = \sum_{i=1}^3 x_i^* y_i$$

allora, usando la (3.1.3) e la (3.1.11), si trova:

$$(x, x) = (x, R^T R x) = (R x, R x) = |\lambda|^2 (x, x)$$

Di qui segue, poiché  $x \neq 0$ :

$$|\lambda| = 1 \quad (3.1.12)$$

D'altra parte gli autovalori sono gli zeri del polinomio di terzo grado  $\det(R - \lambda I)$ , che ha coefficienti reali, visto che  $R$  è una matrice reale. Esiste pertanto certamente un autovalore reale, che indicheremo con  $\lambda_1$ ; gli altri due autovalori,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , se non sono reali, formano una coppia complessa coniugata. Infine

$$\det R = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1 \quad (3.1.13)$$

La (3.1.12) e la (3.1.13) implicano facilmente che esiste un autovalore eguale a  $+1$ . Se infatti  $\lambda_2 = \lambda_3^*$ , allora:

$$+1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = \lambda_1$$

Se invece tutti gli autovalori sono reali, e quindi eguali a  $+1$  o  $-1$ , almeno uno deve essere eguale a  $+1$ , altrimenti il prodotto sarebbe eguale a  $-1$ . Dalle considerazioni precedenti segue anche facilmente che  $\lambda_1$  è un autovalore semplice, a meno che non sia  $R = I$ , nel qual caso tutti gli autovalori sono eguali a  $+1$ . Pertanto, se  $R \neq I$ , l'equazione  $R\psi = \psi$  ammette una soluzione non nulla in  $\mathbb{C}^3$ , individuata a meno di una costante moltiplicativa complessa. Ma  $R$  è reale, quindi  $R\psi = \psi$  implica  $R\psi^* = \psi^*$  e quindi anche  $R(\psi + \psi^*) = \psi + \psi^*$ . Ne segue che  $R\psi = \psi$  ammette anche una soluzione non nulla in  $\mathbb{R}^3$ , individuata a meno di una costante moltiplicativa. ■

Il Teorema di Eulero afferma in sostanza che, se  $R \neq I$ , esiste una ed una sola retta  $r$  di  $\mathbb{R}^3$ , passante per l'origine, i cui punti sono fissi sotto l'azione di  $R$ . Inoltre, se  $\pi$  è un piano ortogonale a  $r$ , intersecante  $r$  nel punto  $x^r$ ,  $\pi$  è invariante rispetto a  $R$  e, se  $x \in \pi$ , l'angolo  $\varphi$  fra il vettore  $x - x^r$  e il vettore  $Rx - x^r$  non dipende da  $x$ ; tutto ciò segue facilmente dal fatto che  $R$  lascia invarianti le lunghezze e gli angoli. Queste proprietà si esprimono di solito dicendo che il cambiamento di riferimento da  $\mathcal{S}'$  a  $\mathcal{S}$ , descritto da  $R$ , consiste in una rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad  $r$ .

Per definire in modo univoco l'angolo  $\varphi$ , è ovviamente necessario fissare una opportuna convenzione. Noi useremo quella che, una volta scelto il verso positivo della retta  $r$ , il modulo di  $\varphi$  è l'angolo di cui bisogna ruotare gli assi del sistema  $\mathcal{S}$  per sovrapporli a quelli del sistema  $\mathcal{S}'$ ; se la rotazione avviene in senso antiorario rispetto al verso di  $r$ ,  $\varphi$  è un numero positivo, altrimenti è negativo. Le due scelte di  $\varphi$  compatibili con questa convenzione differiscono di  $2\pi$  e sono pertanto equivalenti.

Nel caso in cui la retta  $r$  coincide con l'asse  $z$ , è molto facile scrivere gli elementi di  $R$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ . Basta osservare che in tal caso il piano  $xy$  è invariante e che le colonne di  $R$  sono formate, per la (3.1.8), dalle componenti in  $\mathcal{S}$  dei versori degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ .

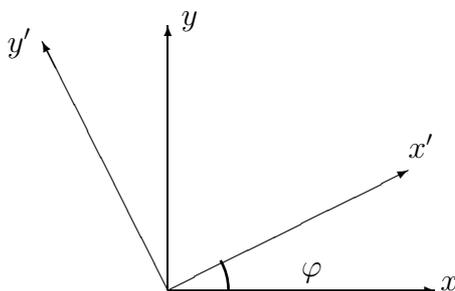


Figura 18: Rotazione intorno all'asse  $z$ .

Detta  $R_z(\varphi)$  la rotazione corrispondente, si trova (vedi Fig. 18):

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.14)$$

Espressioni simili si hanno per le rotazioni che lasciano fisso l'asse  $x$  e l'asse  $y$ , nel seguito indicate rispettivamente con i simboli  $R_x(\varphi)$  e  $R_y(\varphi)$ .

Da quanto abbiamo appena detto segue che è possibile caratterizzare una generica rotazione dando tre parametri, due per individuare la direzione della retta invariante ed uno per indicare l'angolo di rotazione. Un'altra possibilità è quella di utilizzare i cosiddetti *angoli di Eulero*, definiti in Fig. 19. Qui  $x, y$  e  $z$  sono gli assi del sistema  $\mathcal{S}$ ,  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  sono gli assi di  $\mathcal{S}'$ , mentre  $n$  è l'intersezione del piano  $\xi\eta$  con il piano  $xy$ , detta di solito *linea dei nodi*.

Ovviamente, perché gli angoli di Eulero siano definiti, è necessario che  $\theta$  non sia un multiplo di  $\pi$  (altrimenti non è definita la linea dei nodi), cioè è necessario che  $R$  non sia una rotazione intorno all'asse  $z$ ; tutte le altre rotazioni possono essere ottenute (in modo biunivoco), imponendo, per esempio, le restrizioni:

$$0 < \theta < \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

$\theta$  è detto *angolo di nutazione*,  $\varphi$  è detto *angolo di precessione* e  $\psi$  è detto *angolo di rotazione propria*.

È molto facile convincersi che la rotazione di angoli di Eulero  $\theta, \varphi$  e  $\psi$  può ottenersi operando successivamente una rotazione intorno all'asse  $z$  di angolo  $\varphi$ , una rotazione intorno all'asse  $\xi$  di angolo  $\theta$  ed una rotazione intorno all'asse  $\zeta$  di angolo  $\psi$  (l'ordine delle rotazioni è ovviamente importante, perché le rotazioni non commutano). Pertanto, detta  $R(\theta, \varphi, \psi)$  la generica matrice di rotazione, si ha:

$$R(\theta, \varphi, \psi) = R_z(\varphi)R_x(\theta)R_z(\psi) \quad (3.1.15)$$

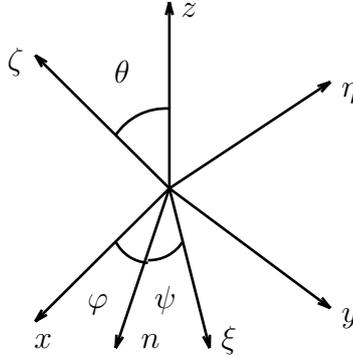


Figura 19: Angoli di Eulero.

da cui è molto facile ricavare un'espressione esplicita di  $R$  in funzione degli angoli di Eulero, usando la (3.1.14) e l'espressione analoga per  $R_x(\theta)$ .

Consideriamo ora il segmento orientato  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e siano  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $V = (V_1, V_2, V_3)$  le sue componenti rispettivamente in  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ ; per la (3.1.10) si ha:

$$v = RV \quad (3.1.16)$$

**Definizione 3.1.3** *Si dice vettore una qualunque terna ordinata di grandezze fisiche, che sono rappresentate in ogni sistema di riferimento da un elemento di  $\mathbb{R}^3$  in modo che, dette  $v$  e  $V$  le rappresentazioni valide in  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  (nel seguito dette anche componenti in  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ ), è verificata la (3.1.16).*

Esempi di vettori, oltre i segmenti orientati, sono la velocità e l'accelerazione di un punto in movimento.

Se  $\overrightarrow{OP_1}$  e  $\overrightarrow{OP_2}$  sono due segmenti orientati, come è ben noto, è possibile costruire un altro segmento orientato

$$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \wedge \overrightarrow{OP_2}$$

detto prodotto vettoriale, le cui componenti  $c \in \mathbb{R}^3$  in un sistema di riferimento qualunque si esprimono in termini delle componenti  $a$  e  $b$  di  $\overrightarrow{OP_1}$  e  $\overrightarrow{OP_2}$  tramite la relazione

$$c_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (3.1.17)$$

essendo  $\varepsilon_{ijk}$  un numero eguale a 0 se due degli indici sono eguali ed eguale altrimenti a +1 o -1, a seconda che  $(ijk)$  sia una permutazione pari o dispari

di (123). Poiché, variando  $P_1$  e  $P_2$ ,  $a$  e  $b$  si possono fare variare arbitrariamente in  $\mathbb{R}^3$  e poiché la (3.1.17) deve valere in ogni sistema di riferimento, per la (3.1.16) deve essere,  $\forall R \in \mathcal{R}$ ,

$$R(a \wedge b) = (Ra) \wedge (Rb) \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1.18)$$

avendo indicato con  $a \wedge b$  l'elemento di  $\mathbb{R}^3$  definito tramite la (3.1.17). La (3.1.18) può ovviamente essere verificata direttamente, usando le proprietà delle matrici di rotazione.

Usando la definizione 3.1.3 e la (3.1.18) è a questo punto banale verificare che, dati due vettori qualunque  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , si può costruire un altro vettore  $\vec{v}_3 \equiv \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ , detto ancora prodotto vettoriale di  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , usando la (3.1.17) per costruire le sue componenti in un qualunque sistema di riferimento in funzione delle componenti di  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

### 3.2 Relazione fra velocità ed accelerazioni nei due sistemi di riferimento.

Siamo ora pronti a discutere il problema principale di questo paragrafo, cioè la relazione esistente fra le funzioni che descrivono il moto di un punto in due diversi sistemi di riferimento, in moto l'uno rispetto all'altro.

Supponiamo che un punto  $P$  si muova nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , il *riferimento fisso*, e che  $q(t)$  siano le sue coordinate al tempo  $t$ . Supponiamo inoltre che  $Q(t)$  siano le coordinate di  $P$  rispetto ad un altro sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$ , il *sistema mobile*, anch'esso in moto rispetto al sistema  $\mathcal{S}$ . Dalla discussione precedente segue che esistono due funzioni continue  $r(t)$  e  $R(t)$ , a valori rispettivamente in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathcal{R}$ , tali che

$$q(t) = r(t) + R(t)Q(t) \quad (3.2.1)$$

Tutte le funzioni del tempo verranno supposte di classe  $C^\infty$ .

Derivando ambedue i membri della (3.2.1), si ottiene:

$$\dot{q} = (\dot{r} + \dot{R}Q) + R\dot{Q} \quad (3.2.2)$$

La (3.2.2) è di solito scritta come eguaglianza fra vettori nella forma

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_r \quad (3.2.3)$$

dove  $\vec{v}_a$ , detto *velocità assoluta*, è il vettore di componenti  $\dot{q}$  in  $\mathcal{S}$ ;  $\vec{v}_r$ , detto *velocità relativa*, è il vettore di componenti  $\dot{Q}$  in  $\mathcal{S}'$  e quindi di componenti  $R\dot{Q}$  in  $\mathcal{S}$ ;  $\vec{v}_r$ , detto *velocità di trascinamento*, è la velocità di un punto fermo rispetto ad  $\mathcal{S}'$  (per cui cioè  $\dot{Q} = 0$ ).

**Proposizione 3.2.1** *La velocità di trascinamento può scriversi nella forma*

$$\vec{v}_\tau = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \quad (3.2.4)$$

dove  $\vec{\omega}$  è un vettore opportuno (in generale funzione del tempo), univocamente individuato dal moto di  $\mathcal{S}'$ . Inoltre  $\vec{\omega}$  è invariante rispetto a traslazioni e rotazioni degli assi di  $\mathcal{S}'$  indipendenti dal tempo.

**Dim.** - Le componenti  $v$  della velocità di trascinamento in  $\mathcal{S}$  sono date, per la (3.2.1) e la (3.2.2), dalla

$$v = \dot{r} + \dot{R}Q = \dot{r} + \dot{R}R^T(q - r) = \dot{r} + A(q - r) \quad (3.2.5)$$

dove  $A$  è la matrice  $\dot{R}R^T$ . D'altra parte, poiché  $RR^T = I$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(RR^T) &= \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow A^T &= (\dot{R}R^T)^T = R\dot{R}^T = -\dot{R}R^T = -A \end{aligned}$$

Pertanto  $A$  è una matrice antisimmetrica, cioè una matrice della forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

I numeri  $\omega_i$  sono stati definiti in modo che siano valide le relazioni:

$$\begin{aligned} \omega_i &= -\frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \\ A_{ij} &= -\sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Dalla (3.2.6) segue che,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ :

$$(Ax)_i = \sum_j A_{ij} x_j = -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j \omega_k = (\omega \wedge x)_i \quad (3.2.7)$$

Poiché  $\dot{r}$  e  $q - r$  sono le componenti rispettivamente di  $\vec{v}_{O'}$  e di  $O'P$  in  $\mathcal{S}$ , la (3.2.5) e la (3.2.7) sono compatibili con la (3.2.4), almeno nel riferimento  $\mathcal{S}$ .

Rimane da dimostrare che  $\omega$  sono effettivamente le componenti in  $\mathcal{S}$  di un vettore  $\vec{\omega}$ . Ciò segue facilmente dalle considerazioni seguenti.

Sia  $\tilde{\mathcal{S}}$  un altro riferimento fisso con origine  $\tilde{O}$  e siano  $\tilde{q}(t)$  le coordinate di  $P$  in  $\tilde{\mathcal{S}}$ ; esistono allora  $\tilde{r} \in \mathbb{R}^3$  e  $\tilde{R} \in \mathcal{R}$ , indipendenti da  $t$ , tali che:

$$\tilde{q}(t) = \tilde{r} + \tilde{R}q(t) = \tilde{r} + \tilde{R}r(t) + \tilde{R}R(t)Q(t) = \tilde{r}(t) + \tilde{R}(t)Q(t)$$

essendo  $\tilde{r}(t)$  le coordinate di  $O'$  in  $\tilde{\mathcal{S}}$  e  $\tilde{R}(t)$  la matrice di rotazione individuata dal cambiamento di riferimento da  $\mathcal{S}'$  a  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Derivando si ha:

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{\tilde{r}} + \tilde{A}(\tilde{q} - \tilde{r}) = \dot{\tilde{r}} + \tilde{\omega} \wedge (\tilde{q} - \tilde{r})$$

con

$$\tilde{\omega}_i = -\frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \tilde{A}_{jk}$$

Poiché  $\dot{\tilde{q}} = \bar{R}\dot{q}$  e  $\dot{\tilde{r}} = \bar{R}\dot{r}$ , deve essere

$$\tilde{\omega} \wedge (\tilde{q} - \tilde{r}) = \bar{R}[\omega \wedge (q - r)] = (\bar{R}\omega) \wedge [\bar{R}(q - r)] = (\bar{R}\omega) \wedge (\tilde{q} - \tilde{r})$$

avendo fatto uso nel secondo passaggio della (3.1.18). Ne segue, poiché  $\tilde{\omega}$  è univocamente individuato da  $\tilde{A}$ , che

$$\tilde{\omega} = \bar{R}\omega$$

Per dimostrare l'ultima affermazione del teorema, consideriamo un altro riferimento  $\mathcal{S}''$  fermo rispetto ad  $\mathcal{S}'$ , di origine  $O''$  ed indichiamo con  $Q''(t)$  le coordinate di  $P$  in  $\mathcal{S}''$ ; esistono allora  $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$  e  $\bar{R} \in \mathcal{R}$ , tali che  $Q(t) = \bar{r} + \bar{R}Q''(t)$ . Inserendo questa relazione nella (3.1.10), si trova:

$$q(t) = r(t) + R(t)\bar{r} + R(t)\bar{R}Q''(t) = r''(t) + R''(t)Q''(t)$$

con  $R''(t) = R(t)\bar{R}$ . Si ha pertanto:

$$\vec{v}_\tau = \vec{v}_{O''} + \vec{\omega}'' \wedge O''P$$

essendo  $\vec{\omega}''$  il vettore individuato tramite la (3.2.6) dalla matrice  $A'' = \dot{R}''R''^T$ . Tuttavia

$$A'' = \dot{R}\bar{R}\bar{R}^T R^T = \dot{R}R^T = A \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}'' = \vec{\omega}$$

■

Il vettore  $\vec{\omega}$  è detto *velocità angolare istantanea*, per la ragione seguente. Lo spostamento  $d\vec{s}$  nel tempo  $dt$  di un punto  $P$  fermo rispetto ad  $\mathcal{S}'$  è dato, per la (3.2.4), se  $\vec{v}_{O'} = 0$ , dalla

$$d\vec{s} = |\vec{\omega}|dt(\vec{n} \wedge \overrightarrow{O'P}) \quad (3.2.8)$$

dove  $\vec{n}$  è il versore della retta  $r$  passante per  $O'$ , avente la direzione e il verso di  $\vec{\omega}$ .  $d\vec{s}$  è pertanto un vettore ortogonale al piano  $\pi$  passante per  $P$  e per  $r$ ; inoltre  $|d\vec{s}| = l_P|\vec{\omega}|dt$ , dove  $l_P$  è la distanza di  $P$  da  $r$ . Di qui segue facilmente che il piano  $\pi$  (così come ogni altro piano passante per  $r$ ) ruota nel tempo  $dt$  di un angolo  $d\varphi = |\vec{\omega}|dt$  intorno ad  $r$ .

Esiste un'importante relazione fra la velocità angolare istantanea e le variazioni degli angoli di Eulero.

**Proposizione 3.2.2** *Se  $\vec{e}_n$ ,  $\vec{e}_z$  e  $\vec{e}_\zeta$  indicano rispettivamente i versori della linea dei nodi, dell'asse  $z$  e dell'asse  $\zeta$  (vedi Fig. 19), allora*

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_n + \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\psi}\vec{e}_\zeta \quad (3.2.9)$$

**Dim.** - Per la (3.2.6)  $\vec{\omega}(t)$  dipende linearmente dagli elementi della matrice  $A(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$ . D'altra parte  $R(t)$  è individuata dagli angoli di Eulero, per cui esiste una funzione  $\tilde{R}(\theta, \varphi, \psi)$ , a valori in  $\mathcal{R}$ , tale che:

$$R(t) = \tilde{R}(\theta(t), \varphi(t), \psi(t))$$

Ne segue che:

$$\dot{R} = \dot{\theta} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi} + \dot{\psi} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \psi} \Rightarrow A = A_\theta + A_\varphi + A_\psi$$

essendo  $A_\theta, A_\varphi, A_\psi$  le matrici corrispondenti ad una rotazione in cui varia, rispettivamente, solo l'angolo  $\theta, \varphi, \psi$ . Si ha pertanto:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\psi$$

essendo  $\vec{\omega}_\theta, \vec{\omega}_\varphi, \vec{\omega}_\psi$  le velocità angolari corrispondenti a  $A_\theta, A_\varphi, A_\psi$ . D'altra parte, dalla Fig. 19 e dall'osservazione che segue la Prop. 3.2.1, segue subito che

$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_n \quad , \quad \vec{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad , \quad \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \vec{e}_\zeta$$

donde la (3.2.9). ■

Nello studio del moto di un corpo rigido è utile avere delle espressioni esplicite per le componenti in  $\mathcal{S}'$  del vettore  $\vec{\omega}(t)$ , che indicheremo con  $\Omega(t)$ . Dalla Fig. 19 segue facilmente, usando la (3.2.9), che:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

La dimostrazione della Prop. 3.2.1 può estendersi immediatamente per calcolare la derivata temporale di un vettore  $\vec{v}(t)$ , le cui componenti in  $\mathcal{S}'$  sono indipendenti dal tempo. Si trova la cosiddetta *formula di Poisson*:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \tag{3.2.11}$$

Passiamo ora a studiare la relazione che c'è fra le accelerazioni nei due riferimenti di un punto  $P$  in moto. Derivando la (3.2.2), si trova:

$$\ddot{q} = (\ddot{r} + \ddot{R}Q) + 2\dot{R}\dot{Q} + R\ddot{Q}$$

che puo risciversi in forma vettoriale nella forma:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_\tau + \vec{a}_c + \vec{a}_r \tag{3.2.12}$$

dove  $\vec{a}_a$ , detta *accelerazione assoluta*, è il vettore di componenti  $\ddot{q}$  in  $\mathcal{S}$ ;  $\vec{a}_r$ , detta *accelerazione relativa*, è il vettore di componenti  $\ddot{Q}$  in  $\mathcal{S}'$ ;  $\vec{a}_\tau$ , detta *accelerazione di trascinamento*, è l'accelerazione di un punto fermo rispetto ad  $\mathcal{S}'$ . Rispetto all'analogia formula (3.2.3) c'è ora un termine in più, la cosiddetta *accelerazione di Coriolis*, le cui componenti in  $\mathcal{S}$  sono  $2R\dot{Q} = 2A(R\dot{Q})$ , essendo  $A$  definito come nella dimostrazione della Prop. 3.2.1; si ha pertanto, usando la (3.2.7) ed il fatto che  $R\dot{Q}$  sono le componenti in  $\mathcal{S}$  di  $\vec{v}_r$ :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad (3.2.13)$$

## 4 Corpo rigido con un punto fisso

### 4.1 Vincolo di rigidità.

Si consideri un sistema  $\Gamma$  di  $N \geq 2$  punti materiali distinti  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ , soggetto al vincolo che le distanze fra tutte le coppie di punti hanno valori fissati; un tale sistema è chiamato *corpo rigido*. Se  $q^{(i)} \in \mathbb{R}^3$  rappresenta le coordinate del punto  $P_i$  nel sistema di riferimento fisso  $\mathcal{S}$  e  $l_{ij}$  è la distanza fra  $P_i$  e  $P_j$ , il vincolo si esprime mediante le  $N(N-1)/2$  condizioni

$$\left(q^{(i)} - q^{(j)}\right)^2 - l_{ij}^2 = 0 \quad , \quad 1 \leq i < j \leq N . \quad (4.1.1)$$

Se  $N = 2$ , le configurazioni di  $\Gamma$  compatibili con le (4.1.1) sono tutte e sole quelle ottenute scegliendo arbitrariamente  $q^{(1)}$  ed il versore della retta che congiunge  $P_1$  con  $P_2$ , orientato come  $\overrightarrow{P_1 P_2}$ ; il sistema ha pertanto 5 gradi di libertà. Lo stesso risultato si ottiene se  $N > 2$  e tutti i punti sono allineati; in tal caso, infatti, una volta fissata la posizione di  $P_1$  e  $P_2$ , la posizione di un qualunque altro punto è univocamente individuata dalla condizione che le sue distanze da  $P_1$  e  $P_2$  sono assegnate.

Se  $N = 3$  e i punti sono non allineati, una volta assegnata la posizione di  $P_1$  e  $P_2$ , la posizione di  $P_3$  è univocamente individuata fissando l'angolo che il piano (unico) passante per i tre punti forma con un piano assegnato passante per la retta che congiunge  $P_1$  con  $P_2$ ; il sistema ha pertanto 6 gradi di libertà.

Lo stesso risultato si ottiene se  $N > 3$  ed esistono in  $\Gamma$  tre punti non allineati. In tal caso, infatti, una volta assegnata la posizione di 3 punti non allineati, quindi anche la giacitura dell'unico piano  $\pi$  che li contiene, la posizione di tutti gli altri punti è individuata a meno di una riflessione rispetto a  $\pi$ . Ciò significa che tutte le configurazioni di  $\Gamma$  compatibili con le (4.1.1) si possono ottenere come unione di due sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}^{3N}$ , ognuno dei quali è localmente in corrispondenza biunivoca con un aperto di  $R^6$ .

I moti del corpo rigido vengono studiati sotto l'ulteriore assunzione che il vincolo di rigidità sia un vincolo ideale. Si assume cioè, vedi §2.1, che, dato un qualunque moto  $q(t) = (q^{(1)}(t), \dots, q^{(N)}(t))$  compatibile con i vincoli nell'intervallo di tempo  $I$  e dato comunque  $t \in I$ , ogni punto  $P_i$  di  $\Gamma$  è soggetto ad una reazione vincolare  $R^{(i)}(q(t), \dot{q}(t))$ , così che, dato un qualunque moto  $\tilde{q}(s, t)$  compatibile con i vincoli, definito in un intervallo contenente  $s = t$  e tale che  $\tilde{q}(t, t) = q(t)$ , sia valida la condizione

$$\sum_{i=1}^N R^{(i)} \cdot \dot{\tilde{q}}(t, t) = 0 . \quad (4.1.2)$$

Da un punto di vista geometrico, questa condizione significa che il vettore  $R = (R^{(1)}, \dots, R^{(N)}) \in \mathbb{R}^{3N}$  è ortogonale al sottospazio lineare tangente

alla superficie  $\Sigma$  dei punti  $q = (q^{(1)}, \dots, q^{(N)}) \in \mathbb{R}^{3N}$  che soddisfano i vincoli (4.1.1). Pertanto  $R$  deve appartenere ad un sottospazio lineare di dimensione  $3N - 6$  o  $3N - 5$ , a seconda che ci siano o meno in  $\Gamma$  tre punti non allineati.

Consideriamo ora un sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$  fisso rispetto ad  $\Gamma$ , con origine in  $O'$  (che non deve necessariamente appartenere a  $\Gamma$ ). Se  $q_{O'}$  sono le coordinate in  $\mathcal{S}$  di  $O'$  al tempo  $t$ , per la Prop. 3.2.1,  $\dot{q}^{(i)}(t, t)$  è necessariamente della forma  $\dot{q}^{(i)}(t, t) = v_0 + \omega \wedge (q^{(i)} - q_{O'})$ . La (4.1.2) può pertanto scriversi, usando l'identità  $a \cdot (b \wedge c) = b \cdot (c \wedge a)$ , nella forma

$$v_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^N R^{(i)} \right] + \omega \cdot \left[ \sum_{i=1}^N (q^{(i)} - q_{O'}) \wedge R^{(i)} \right] = 0. \quad (4.1.3)$$

D'altra parte, al variare di  $\tilde{q}(s, t)$ , i vettori  $v_0$  e  $\omega$  possono assumere qualunque valore in  $\mathbb{R}^3$ ; ne segue che le condizioni (4.1.3) sono equivalenti alle condizioni

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N R^{(i)} = 0 \quad , \quad \mathcal{M} = \left[ \sum_{i=1}^N (q^{(i)} - q_{O'}) \wedge R^{(i)} \right] = 0, \quad (4.1.4)$$

che si esprimono di solito dicendo che il sistema di reazioni vincolari è un *sistema di forze equilibrato*. Si noti che  $\mathcal{M}$ , momento delle reazioni vincolari rispetto a  $O'$ , non dipende da  $O'$ , come è facile verificare usando il fatto che la risultante  $\mathcal{R}$  è nulla. Pertanto le (4.1.4) impongono al più 6 condizioni indipendenti sul sistema di reazioni vincolari, in accordo con le osservazioni fatte precedentemente (dopo la (4.1.2)) sulla dimensione del sottospazio lineare cui deve appartenere il vettore  $R$ .

Un'altra caratterizzazione del sottospazio lineare cui appartiene  $R$ , tuttavia non valida in generale, si può ottenere notando che, se si definisce  $\tilde{q}(s, t)$  come prima e si indica con  $\varphi_{ij}(q)$  il primo membro della (4.1.1), si deve avere  $\varphi_{ij}(\tilde{q}(s, t)) = 0$  per ogni  $s$  vicino a  $t$ ; derivando rispetto a  $s$ , si trova:

$$\partial \varphi_{ij}(q(t)) \cdot \dot{\tilde{q}}^{(i)}(t, t) = 0, \quad (4.1.5)$$

avendo indicato con  $\partial = (\partial^{(1)}, \dots, \partial^{(N)})$  il gradiente in  $\mathbb{R}^{3N}$  e con  $\partial^{(i)}$  il gradiente rispetto alle sole coordinate della particella  $i$ -esima. Pertanto il vettore  $\partial \varphi_{ij}(q) \in \mathbb{R}^{3N}$  appartiene, per ogni  $q \in \Sigma$ , al sottospazio ortogonale al sottospazio tangente a  $\Sigma$  in  $q$ . Poiché  $N(N-1)/2 > 3N-6$  per  $N > 4$ , i vettori  $\partial \varphi_{ij}(q)$ , con  $1 \leq i < j \leq N$ , non possono essere in generale indipendenti; ciò è possibile solo se  $N \leq 4$ . È tuttavia da aspettarsi che, in generale, essi generino tutto il sottospazio ortogonale; se ciò succede, il vettore  $R$  può rappresentarsi (in modo sicuramente non unico per  $N > 4$ ) nella forma

$$R(q(t), \dot{q}(t)) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_{ij}(q(t), \dot{q}(t)) \partial \varphi_{ij}(q(t)), \quad (4.1.6)$$

essendo  $\lambda_{ij}(q(t), \dot{q}(t))$  delle costanti scalari opportune, dipendenti dal moto effettivo. Si noti ora che, per le (4.1.1),

$$\partial^{(r)}\varphi_{ij}(q) = 2\delta_{ri}(q^{(r)} - q^{(j)}) + 2\delta_{rj}(q^{(r)} - q^{(i)}), \quad (4.1.7)$$

da cui segue facilmente che

$$\begin{aligned} R^{(r)} &= \sum_{r < j \leq N} 2\lambda_{rj}(q^{(r)} - q^{(j)}) + \sum_{1 \leq i < r} 2\lambda_{ir}(q^{(r)} - q^{(i)}) = \\ &= \sum_{j \neq r} 2\tilde{\lambda}_{rj}(q^{(r)} - q^{(j)}), \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

con  $\tilde{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}$ , se  $i < j$ , e  $\tilde{\lambda}_{ij} = \lambda_{ji}$ , se  $i > j$ , così che  $\tilde{\lambda}_{ij} = \tilde{\lambda}_{ji}$ . Il sistema di reazioni vincolari è pertanto della stessa forma di un *sistema di forze interne*, cioè di un sistema di forze agente su di un sistema di  $N$  particelle, tale che la forza  $F^{(i)}$  agente sulla particella  $i$ -esima è della forma  $F^{(i)} = \sum_{j \neq i} f_{ij}(q^{(i)} - q^{(j)})$ , con  $f_{ij} = f_{ji}$ . Rispetto all'usuale definizione di sistema di forze interne, manca tuttavia la proprietà che le funzioni scalari  $f_{ij}$  dipendono solo dalle posizioni e velocità delle particelle di indice  $i$  e  $j$ , in quanto esse dipendono in generale (fra l'altro in modo non unico, per  $N > 4$ ) dalle posizioni e velocità di tutte le particelle.

Le considerazioni precedenti mostrano che l'idea intuitiva di interpretare il vincolo di rigidità come dovuto ad una interazione additiva a due corpi fra le particelle, così da giustificare l'ipotesi di vincolo ideale (in quanto un sistema di forze interne soddisfa senz'altro le condizioni (4.1.4)), non è del tutto giustificata. Del resto, non è nemmeno vero in generale che  $R$  possa rappresentarsi nella forma (4.1.6), in quanto ciò è certamente falso se  $N \geq 3$  e tutti i punti sono allineati. Per dimostrarlo, indichiamo con  $E_N$  l'insieme di vettori  $\{\partial\varphi_{ij}, 1 \leq i < j \leq N\}$  e dimostriamo che ogni vettore di  $E_N$  può scriversi come combinazione lineare di  $N - 1$  vettori, anch'essi appartenenti ad  $E_N$ , se  $N \geq 3$  e se i punti sono tutti allineati. Da ciò segue subito che, nell'ipotesi precedente,  $E_N$  non può generare il sottospazio ortogonale, in quanto la sua dimensione è  $3N - 5$  (il sistema ha 5 gradi di libertà) e  $3N - 5 > N - 1$ , se  $N > 2$ .

Per dimostrare l'affermazione precedente, consideriamo le prime tre particelle e supponiamo (il che non è restrittivo) che la retta che contiene i tre punti coincida con l'asse  $z$  e che  $z_1 > z_2 > z_3$ , avendo posto inoltre  $q^{(i)} = (x_i, y_i, z_i)$ . Usando la (4.1.7), si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \partial\varphi_{12} &= (0, 0, 2l_{12}, 0, 0, -2l_{12}, 0, 0, 0, \underline{0}), \\ \partial\varphi_{13} &= (0, 0, 2l_{13}, 0, 0, 0, 0, 0, -2l_{13}, \underline{0}), \\ \partial\varphi_{23} &= (0, 0, 0, 0, 0, 2l_{23}, 0, 0, -2l_{23}, \underline{0}), \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

avendo indicato con  $\underline{0}$  il vettore nullo con  $3N - 9$  componenti. È facile verificare che i tre vettori (4.1.9) sono linearmente dipendenti e che uno

qualunque di essi può esprimersi come combinazione lineare degli altri due. Il ragionamento precedente può ovviamente applicarsi a qualunque terna di vettori  $\partial\varphi_{ij}$ ; pertanto, se consideriamo l'insieme  $\{\partial\varphi_{iN}, 1 \leq i \leq N-1\}$ , ogni vettore di questo insieme può scriversi come combinazione lineare di  $\partial\varphi_{1N}$  e  $\partial\varphi_{1i}$ . Poiché  $\partial\varphi_{1i} \in E_{N-1}$ , ne segue che, se ogni vettore di  $E_{N-1}$  può scriversi come combinazione lineare di  $N-2$  suoi vettori, allora ogni vettore di  $E_N$  può scriversi come combinazione lineare di  $N-1$  suoi vettori. Poiché l'affermazione precedente è vera per  $N=3$ , essa è vera per ogni  $N \geq 3$ .

Si possono fare facilmente altri esempi di sistemi di punti per cui la dimensione di  $E_N$  è inferiore a  $3N-6$ , anche se i punti non sono tutti allineati. Si supponga, per esempio, che  $N = M+1$  e che i primi  $M$  punti sono allineati, senza essere allineati con l'ultimo. Poiché i vettori che appartengono a  $E_N$ , ma non a  $E_M$ , sono  $M$ , la dimensione di  $E_N$  può essere al più eguale a  $(M-1) + M$ , che è minore di  $3(M+1) - 6$ , se  $M > 2$ . Sembra tuttavia complicato caratterizzare gli insiemi di punti per cui la dimensione di  $E_N$  è inferiore a  $3N-6$ .

## 4.2 Cinematica del corpo rigido.

Sia  $\Gamma$  un corpo rigido, costituito da  $N$  punti materiali distinti di masse  $m_1, \dots, m_N$ , e supponiamo che il vincolo di rigidità sia un vincolo ideale. Consideriamo inoltre un sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$  fisso rispetto a  $\Gamma$  con origine  $O'$ , non necessariamente appartenente a  $\Gamma$ . Vogliamo studiare la cinematica di  $\Gamma$  rispetto al sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , con origine in  $O$ . Ovviamente il moto del corpo rigido è completamente determinato dal moto di  $\mathcal{S}'$  rispetto ad  $\mathcal{S}$ , studiato nel §3, e può pertanto essere descritto, per esempio, in termini degli angoli di Eulero (vedi Fig. 19) e del moto di  $O'$ .

Consideriamo, per cominciare, l'energia cinetica  $\mathcal{T}$  di  $\Gamma$  nel riferimento  $\mathcal{S}$ , indicando con  $P_i$  e  $\vec{v}_i$  la posizione e la velocità del punto  $i$ -esimo. Indichiamo inoltre con  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  la *massa totale* di  $\Gamma$  e con  $G$  la posizione del *baricentro*, definito come l'unico punto tale che, dato un qualunque altro punto  $T$  dello spazio, valga l'identità

$$M \overrightarrow{TG} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{TP_i}. \quad (4.2.1)$$

Poiché tutti i punti sono fermi rispetto ad  $\mathcal{S}'$ , usando la (3.2.3), la (3.2.4) e l'identità  $\vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{x})$ , troviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} M (\vec{v}_{O'})^2 + \vec{\omega} \cdot [\overrightarrow{O'G} \wedge (M \vec{v}_{O'})] + \mathcal{T}_{O'}, \quad (4.2.2) \\ \mathcal{T}_{O'} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{O'P_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) . \quad (4.2.3)$$

Si noti che, se  $O' = G$ , il secondo termine nel membro di destra della (4.2.2) è nullo, per cui vale il *Teorema di König*

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \mathcal{T}_G , \quad (4.2.4)$$

che giustifica la definizione di  $\mathcal{T}_G$  come *energia cinetica di rotazione intorno al baricentro*. Si noti infine che, se  $\vec{v}_{O'} = 0$ ,  $\mathcal{T}$  coincide con  $\mathcal{T}_{O'}$ .

Consideriamo ora il momento angolare  $\vec{j}_T$  del sistema rispetto al polo  $T$  in  $\mathcal{S}$ ; si ha

$$\vec{j}_T = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{TP_i} \wedge \vec{v}_i = \overrightarrow{TO'} \wedge (M \vec{v}_G) + \overrightarrow{O'G} \wedge (M \vec{v}_{O'}) + \vec{j} , \quad (4.2.5)$$

$$\vec{j} \equiv \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O'P_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P_i}) . \quad (4.2.6)$$

Si noti che, se  $T = O' = G$ ,  $\vec{j}_G = \vec{j}$ .

La (4.2.3) e la (4.2.6) implicano che

$$\mathcal{T}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} (\Omega, J) , \quad (4.2.7)$$

dove  $\Omega$  e  $J$  indicano gli elementi di  $\mathbb{R}^3$ , le cui componenti coincidono con le componenti in  $\mathcal{S}'$  di  $\vec{\omega}$  e  $\vec{j}$ , rispettivamente, e  $(\cdot, \cdot)$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ .

Usando l'identità  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ed indicando con  $Q^{(i)} \in \mathbb{R}^3$  le componenti nel sistema  $\mathcal{S}'$  di  $\overrightarrow{O'P_i}$ , la (4.2.6) può scriversi nella forma

$$J = \mathbb{I} \Omega , \quad (4.2.8)$$

dove  $\mathbb{I}$  è la matrice con elementi

$$I_{rs} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ Q^{(i)2} \delta_{rs} - Q_r^{(i)} Q_s^{(i)} \right] . \quad (4.2.9)$$

Si noti che la matrice  $I$ , detta *matrice di inerzia*, dipende dalla geometria del corpo, nonché dalla scelta di  $\mathcal{S}'$ , ma è indipendente dal moto di  $\mathcal{S}'$ . Questa proprietà, che sarà cruciale nell'analisi dei moti del corpo rigido, non sarebbe vera, se si scrivesse la relazione (4.2.8) in termini delle componenti in un altro sistema di riferimento, per esempio  $\mathcal{S}$ .

Se si inserisce la (4.2.8) nella (4.2.7), si trova

$$\mathcal{T}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} (\Omega, \mathbb{I} \Omega) , \quad (4.2.10)$$

da cui segue, in particolare, che  $\mathbb{I}$  è una matrice semidefinita positiva, poichè l'energia cinetica non può essere negativa. Poichè  $\mathbb{I}$  è anche simmetrica, la si può diagonalizzare, si può cioè scegliere il sistema  $\mathcal{S}'$  così che  $I_{rs} = I_r \delta_{rs}$ , con  $I_r \geq 0, \forall r$ . Se si opera una scelta di questo tipo, gli assi di  $\mathcal{S}'$  sono detti *assi principali di inerzia*,  $\mathbb{I}$  è detta *matrice principale di inerzia* ed i numeri  $I_r$  sono detti *momenti principali di inerzia*. Quest'ultima definizione dipende dal fatto che, per la (4.2.9), anche se  $\mathbb{I}$  non è diagonale,

$$I_{rr} = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{s \neq r} Q_s^{(i)2} = \sum_{i=1}^N m_i d_r^{(i)2}, \quad (4.2.11)$$

dove  $d_r^{(i)}$  è la distanza di  $P_i$  dall'asse  $r$ -esimo di  $\mathcal{S}'$ , per cui  $I_{rr}$  coincide con il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse  $r$ -esimo. La (4.2.11) implica anche che al più uno dei momenti principali di inerzia può essere nullo e ciò può succedere solo se tutti i punti sono allineati e se  $O'$  è allineato con essi; in tal caso uno degli assi principali di inerzia, quello rispetto a cui il momento è nullo, è diretto come la retta contenente tutti i punti del sistema.

La matrice di inerzia permette di calcolare in modo molto semplice anche il momento di inerzia del corpo rigido rispetto a qualunque retta. Sia infatti  $n$  un elemento di  $\mathbb{R}^3$  di modulo uno, che rappresenta il vettore  $\vec{n}$  in  $\mathcal{S}'$  e sia  $\mathcal{C}$  una retta parallela a  $\vec{n}$ ; per la (4.2.9), anche se  $\mathbb{I}$  non è diagonale,

$$(n, \mathbb{I}n) = \sum_{i=1}^N m_i [(Q^{(i)}, Q^{(i)}) - (Q^{(i)}, n)^2] = \sum_{i=1}^N m_i d_{\mathcal{C}}^{(i)2}, \quad (4.2.12)$$

dove  $d_{\mathcal{C}}^{(i)}$  è la distanza di  $P_i$  dalla retta  $\mathcal{C}$ . Pertanto  $(n, \mathbb{I}n)$  è proprio il momento di inerzia del sistema rispetto alla retta  $\mathcal{C}$ .

Un'altra grandezza geometrica interessante associata con il corpo rigido è l'*ellissoide d'inerzia*, definito come l'insieme dei punti di  $Q \in \mathcal{S}'$  tali che

$$(Q, \mathbb{I}Q) = 1. \quad (4.2.13)$$

L'ellissoide di inerzia dipende dalla scelta di  $O'$ , ma non dall'orientamento degli assi di  $\mathcal{S}'$ ; i suoi assi coincidono con gli assi principali di inerzia. Inoltre la sua forma dà un'idea qualitativa della distribuzione dei punti in  $\mathcal{S}'$ , in quanto, se  $P$  è un suo punto di coordinate  $Q$  in  $\mathcal{S}'$ , la (4.2.13) implica che, posto  $Q = |Q|n$  (così che  $\vec{OP} = |\vec{OP}|\vec{n}$ ), deve essere  $|\vec{OP}|^2 = 1/(n, \mathbb{I}n)$ . Ne segue, in particolare, che, più l'ellissoide è allungato in una direzione, più la massa del corpo rigido è vicina alla retta passante per  $O'$  e parallela a quella direzione.

Due corpi rigidi diversi possono avere lo stesso ellissoide d'inerzia, che caratterizza completamente la cinematica. Pertanto, dal punto di vista cinematico, l'ellissoide d'inerzia può sostituire a tutti gli effetti il sistema di punti. Ciò non è in generale vero per la dinamica del corpo rigido, perchè

due sistemi di punti diversi con lo stesso ellissoide d'inerzia sono in generale soggetti a forze esterne diverse. Un caso importante in cui ciò non è vero è quello del corpo rigido in assenza di forze esterne; in tal caso il moto è determinato esclusivamente dall'ellissoide d'inerzia.

Il fatto che la cinematica del corpo rigido dipenda solo dalla matrice di inerzia permette inoltre di estendere in modo naturale il modello di corpo rigido ad un sistema continuo di punti, che occupa una regione compatta  $V$  dello spazio con densità  $\rho(Q)$  assegnata. Basta utilizzare tutte le formule precedenti, definendo la matrice d'inerzia tramite l'equazione

$$I_{rs} = \int_V dQ \rho(Q) [Q^2 \delta_{rs} - Q_r Q_s] . \quad (4.2.14)$$

### 4.3 Moti del corpo rigido libero con un punto fisso.

Passiamo ora a studiare la dinamica del corpo rigido in alcuni casi particolari. Consideriamo per primo il caso più semplice, quello di un corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze esterne. In tal caso possiamo scegliere le origini di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  ambedue coincidenti con il punto fisso; supporremo inoltre che gli assi di  $\mathcal{S}'$  siano stati scelti in modo da diagonalizzare la matrice di inerzia e che il vincolo di punto fisso sia un vincolo ideale. Conviene distinguere tre casi in funzione dei valori dei momenti di inerzia principali.

a)  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ .

In tal caso i vettori  $\vec{j}$  e  $\vec{\omega}$  sono paralleli, poichè, per la (4.2.8),  $J_i = I\Omega_i$ . D'altra parte, poichè il momento delle reazioni vincolari rispetto al punto fisso è nullo, grazie alla seconda delle (4.1.4), al fatto che il vincolo di punto fisso è realizzato con una reazione vincolare applicata in  $O$  ed all'assenza di altre forze, per la seconda equazione cardinale  $\vec{j}$  è costante. Ne segue che anche  $\vec{\omega}$  è costante, così che tutti i moti permessi sono rotazioni uniformi intorno ad un asse fissato.

b)  $I_1 = I_2 = I, I_3 \neq I$ .

In questo caso si dice che il corpo rigido è una *trottola* o un *giroscopio*. Se utilizziamo gli angoli di Eulero come variabili lagrangiane, la Lagrangiana del sistema si ottiene sostituendo nell'espressione (4.2.10) dell'energia cinetica le espressioni (3.2.10) delle componenti in  $\mathcal{S}'$  di  $\vec{\omega}$ . Si trova

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 . \quad (4.3.1)$$

Poiché  $\psi$  e  $\varphi$  sono variabili cicliche, si hanno due leggi di conservazione

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{cost} , \quad (4.3.2)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{cost} . \quad (4.3.3)$$

La costanza di  $p_\varphi$  è strettamente legata alla conservazione del momento angolare (vedi punto a)). Infatti,  $p_\varphi$  può scriversi anche nella forma, valida anche se  $I_1 \neq I_2$ ,

$$p_\varphi = \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \Omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \Omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \Omega_3 \cos \theta . \quad (4.3.4)$$

Poché le componenti di  $\vec{e}_z$  in  $\mathcal{S}'$  sono  $(\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)$ , come segue facilmente dalla Fig. 19, si vede subito, usando la (4.2.8), che  $p_\varphi = \vec{j} \cdot \vec{e}_z$ .

La costanza di  $\vec{j}$  non è invece sufficiente a spiegare il fatto che  $p_\psi = I_3 \Omega_3 = \vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta$  è costante, in quanto il vettore  $\vec{e}_\zeta$  non è in generale costante. In tal caso il fatto che  $I_1 = I_2 = I$  è infatti essenziale, come mostra il calcolo seguente. Se indichiamo con  $\vec{j}_\perp$  e  $\vec{\omega}_\perp$  le proiezioni di  $\vec{j}$  e  $\vec{\omega}$  sul piano  $(\xi\eta)$  di  $\mathcal{S}'$ , si ha

$$\vec{j}_\perp = I_1 \Omega_1 \vec{e}_\xi + I_2 \Omega_2 \vec{e}_\eta = I(\Omega_1 \vec{e}_\xi + \Omega_2 \vec{e}_\eta) = I \vec{\omega}_\perp , \quad (4.3.5)$$

$$\vec{j} = I \vec{\omega}_\perp(t) + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta(t) . \quad (4.3.6)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta) &= \vec{j} \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{e}_\zeta \right) = \vec{j} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_\zeta) = \\ &(\vec{j}_\perp + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \cdot [(\vec{\omega}_\perp + \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \wedge \vec{e}_\zeta] = (I \vec{\omega}_\perp + I_3 \Omega_3 \vec{e}_\zeta) \cdot (\vec{\omega}_\perp \wedge \vec{e}_\zeta) = 0 . \end{aligned}$$

Le considerazioni precedenti valgono comunque si scelga il riferimento fisso  $\mathcal{S}$ . La conservazione del momento angolare suggerisce di scegliere la direzione dell'asse  $z$  di  $\mathcal{S}$  coincidente con quella di  $\vec{j}$ . Questa scelta ha la conseguenza che  $\mathcal{S}$  dipende dalle condizioni iniziali, ma permette di risolvere molto facilmente il problema di determinare i moti del sistema. Infatti, per la terza delle (3.2.10) e la (4.3.3),  $\Omega_3$  è una costante del moto; d'altra parte la scelta di  $\mathcal{S}$  e la (4.2.8) implicano che  $I_3 \Omega_3 = J_3 = \vec{j} \cdot \vec{e}_\zeta = |\vec{j}| \cos \theta$  (vedi Fig. 19). Ne segue, poiché anche  $|\vec{j}|$  è costante, che  $\theta$  è costante. Poiché, per le (4.3.2) e (4.3.3),  $p_\varphi = I \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta$ , anche  $\dot{\varphi}$  è allora costante, così come  $\dot{\psi}$ , dato che  $\dot{\psi} = p_\psi / I_3 - \dot{\varphi} \cos \theta$ .

La discussione precedente si può riassumere dicendo che tutti i moti della trottola sono delle *precessioni regolari* intorno alla direzione del momento angolare, intendendo per precessione regolare intorno alla direzione di un asse dato  $r$  un moto tale che un asse  $r'$ , fisso rispetto al corpo, ruota con velocità angolare costante intorno a  $r$ , mentre il corpo ruota con velocità angolare costante intorno a  $r'$ . Nel caso della trottola l'asse  $r'$  è l'asse principale d'inerzia di momento  $I_3$ .

Vediamo ora come si determina il moto della trottola in funzione delle condizioni iniziali, che ovviamente devono essere date rispetto ad un riferimento fisso  $\mathcal{S}_0$ , scelto in modo arbitrario una volta per tutte. Supponiamo pertanto che siano dati in  $\mathcal{S}_0$  i versori di  $\mathcal{S}'$  al tempo  $t = 0$ , insieme alla

velocità angolare  $\vec{\omega}(0)$ , e procediamo esplicitando la dipendenza dal tempo solo per le grandezze che non sono necessariamente costanti in base alla discussione precedente.

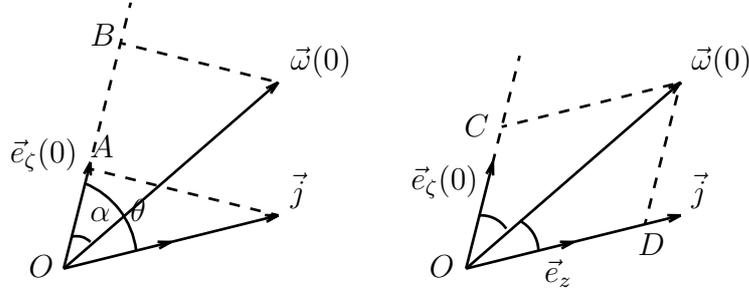


Figura 20: Decomposizioni di  $\vec{\omega}(0)$ .

La (4.3.6) implica che i vettori  $\vec{j}$ ,  $\vec{\omega}(t)$  e  $\vec{e}_\zeta(t)$  sono complanari per ogni  $t$  e che il vettore costante  $\vec{j}$  può essere determinato in funzione dei dati iniziali, usando la (4.3.6) con  $t = 0$ , cioè  $\vec{j} = I\vec{\omega}_\perp(0) + I_3\Omega_3\vec{e}_\zeta(0)$ ; in particolare l'angolo  $\theta$ , costante nel tempo, fra  $\vec{j}$  e  $\vec{e}_\zeta(t)$  è calcolabile in funzione dell'angolo  $\alpha$  fra  $\vec{\omega}(0)$  e  $\vec{e}_\zeta(0)$  tramite l'equazione

$$\tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \alpha , \quad (4.3.7)$$

vedi il disegno nella parte sinistra di Fig. 20 (valido per  $I > I_3$ , altrimenti il vettore  $\vec{j}$  sarebbe compreso fra  $\vec{\omega}(0)$  e l'asse  $\zeta$ ), dove  $|\vec{OA}| = \Omega_3$ ,  $|\vec{OB}| = J_3 = I_3\Omega_3$ .

Possiamo ora scegliere l'asse  $z$  diretto come  $\vec{j}$ , così che, in base alla discussione precedente,  $\dot{\theta} = 0$ , mentre  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  sono costanti del moto, i cui valori possono essere determinati usando la (3.2.9). Si ha

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\psi}\vec{e}_\zeta(t) . \quad (4.3.8)$$

Pertanto  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  sono le componenti di  $\vec{\omega}(0)$  rispettivamente lungo l'asse  $z$  e l'asse  $\zeta$ , vedi parte destra di Fig. 20, dove  $\vec{OD} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$  e  $\vec{OC} = \dot{\psi}\vec{e}_\zeta$ . Usando il Teorema dei Seni, si trova facilmente che

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} |\vec{\omega}(0)| \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} |\vec{\omega}(0)| . \quad (4.3.9)$$

c)  $I_1 < I_2 < I_3$ .

In tal caso, come è facile controllare usando le (3.2.10), la Lagrangiana dipende esplicitamente, oltre che da  $\theta$ , anche da  $\psi$ , per cui l'unica variabile ciclica è  $\varphi$ , cui corrisponde la legge di conservazione  $p_\varphi = \text{cost}$ . Non è pertanto più vero che  $p_\psi$  è costante e le equazioni di Lagrange non sono di

grande aiuto per determinare i moti del sistema. Come vedremo, risulta invece molto semplice raggiungere questo risultato, studiando preliminarmente le funzioni  $J_i(t) = I_i\Omega_i(t)$ .

Cominciamo con l'osservare che queste tre funzioni soddisfano due leggi di conservazione. La prima discende dalla conservazione dell'energia  $E$  (coincidente con l'energia cinetica), la quale implica, per la (4.2.10) e la (4.2.8), che

$$\sum_{i=1}^3 \frac{J_i^2}{a_i^2} = 1 \quad , \quad a_i = \sqrt{2EI_i} . \quad (4.3.10)$$

La seconda legge di conservazione segue dalla conservazione del modulo  $A$  del momento angolare, che implica, per la (4.2.8), che

$$\sum_{i=1}^3 J_i^2 = A^2 . \quad (4.3.11)$$

Ne segue che ogni moto del sistema è tale che, in  $\mathcal{S}'$ , il punto di coordinate  $J(t)$  appartiene all'intersezione dell'ellissoide (4.3.10) e della sfera (4.3.11). Poiché questa intersezione non può essere vuota, le costanti  $E$  e  $A$  devono soddisfare la condizione

$$2EI_1 \leq A^2 \leq 2EI_3 . \quad (4.3.12)$$

Facciamo ora vedere che le componenti di  $J(t)$  soddisfano un sistema relativamente semplice di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Se indichiamo con  $R(t)$  la trasformazione ortogonale che fa passare dalle coordinate in  $\mathcal{S}'$  alle coordinate in  $\mathcal{S}$  di un vettore qualunque (vedi (3.1.16)) e con  $j = (j_1, j_2, j_3)$  le componenti in  $\mathcal{S}$  di  $\vec{j}$ , si ha, usando la (3.2.11)

$$0 = \frac{dj}{dt} = \frac{d}{dt}(RJ) = \dot{R}J + R\dot{J} = \omega \wedge j + R\dot{J} . \quad (4.3.13)$$

D'altra parte, per la (3.1.18),  $\omega \wedge j = (R\Omega) \wedge (RJ) = R(\Omega \wedge J)$ ; pertanto  $R(\Omega \wedge J + \dot{J}) = 0$  e quindi  $\Omega \wedge J + \dot{J} = 0$ , poiché  $R$  è invertibile. Usando anche la (4.2.8), si arriva finalmente alle equazioni, dette *equazioni di Eulero*,

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= (I_3^{-1} - I_2^{-1})J_2J_3 \\ \dot{J}_2 &= (I_1^{-1} - I_3^{-1})J_3J_1 \\ \dot{J}_3 &= (I_2^{-1} - I_1^{-1})J_1J_2 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Le (4.3.14) permettono di calcolare immediatamente tutte le soluzioni costanti: esse si ottengono annullando almeno due delle componenti di  $J$ . In altre parole,  $J(t) = J(0)$  se e solo se  $J(0)$  appartiene ad uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ . D'altra parte, se  $\dot{J} = 0$ , è anche  $\dot{\Omega} = 0$ , per cui

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(R\Omega) = \dot{R}\Omega = \omega \wedge \omega = 0 . \quad (4.3.15)$$

Ne segue che le soluzioni costanti delle (4.3.14) corrispondono a moti rotatori uniformi intorno ad uno degli assi di inerzia principali del sistema (gli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ ); infatti  $\vec{\omega}$  è costante e coincide con la sua proiezione su uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ , essendo nulle le proiezioni sugli altri due assi.

Se  $J(0)$  non appartiene ad uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ , la traiettoria di  $J(t)$  si può determinare facilmente usando l'osservazione, fatta precedentemente, che essa è contenuta necessariamente nell'intersezione dell'ellissoide (4.3.10) e della sfera (4.3.11). Conviene distinguere tre casi differenti.

i)  $2EI_1 < A^2 < 2EI_2$ .

In tal caso il raggio della sfera è compreso fra il semiasse minore e quello intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che girano (sulla superficie dell'ellissoide) intorno all'asse  $\xi$ , vedi Fig. 21.

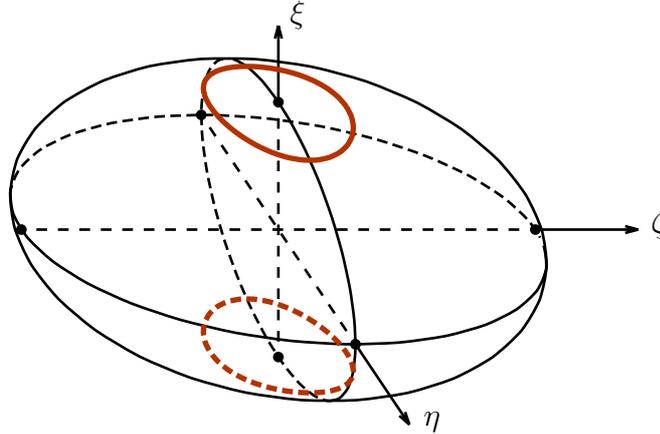


Figura 21: Traiettorie nel caso  $2EI_1 < A^2 < 2EI_2$ .

Poiché nessuna delle due curve contiene stati di equilibrio del sistema (4.3.14), ragionando come nel §1.1 si può concludere immediatamente che, se  $J(0)$  appartiene ad una di queste curve, la traiettoria coincide con essa e la funzione  $J(t)$  è periodica. Per determinare la legge oraria, si procede nel modo seguente.

Consideriamo le soluzioni la cui traiettoria coincide con la curva superiore, caratterizzata dal fatto che  $J_1(t) > 0$ , per ogni  $t$ ; le altre si studiamo in modo del tutto analogo. Poiché il sistema (4.3.14) è autonomo, tutte queste soluzioni si ottengono con una traslazione dell'origine dei tempi da quella con  $J_3(0) = 0$  e  $J_2(0) < 0$ ; supporremo pertanto che anche queste due condizioni siano soddisfatte. Usando le (4.3.10) e (4.3.11), si vede facilmente che

$$J_1^2\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) = (2EI_3 - A^2) - J_2^2\left(\frac{I_3}{I_2} - 1\right), \quad (4.3.16)$$

$$J_3^2 \left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right) = (A^2 - 2EI_1) - J_2^2 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right). \quad (4.3.17)$$

Poiché  $J_1(t) > 0$ , la (4.3.16) può risolversi univocamente rispetto a  $J_1$  nella forma  $J_1 = \sqrt{\alpha_1 - \beta_1 J_2^2}$ , con  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  costanti positive opportune. La (4.3.17) permette invece di esprimere  $J_3$  in funzione di  $J_2$  nella forma  $J_3 = \pm \sqrt{\alpha_3 - \beta_3 J_2^2}$ , con  $\alpha_3$  e  $\beta_3$  positivi e  $\alpha_3/\beta_3 < \alpha_1/\beta_1$ ; per la seconda delle (4.3.14) il segno di  $J_3$  è positivo nei punti in cui  $\dot{J}_2 > 0$ , negativo in quelli in cui  $\dot{J}_2 < 0$  (pertanto la traiettoria è percorsa in senso orario). Sostituendo nella seconda delle (4.3.14) le espressioni trovate per  $J_1$  e  $J_3$ , si trova che la funzione  $J_2(t)$  deve soddisfare, nel tratto di curva in cui  $J_3 > 0$ , l'equazione differenziale

$$\dot{J}_2 = (I_1^{-1} - I_3^{-1}) \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1 J_2^2)(\alpha_3 - \beta_3 J_2^2)}, \quad (4.3.18)$$

e che, se  $T$  è il periodo del moto,  $J_2(t)$  passa, nell'intervallo di tempo  $[0, T/2]$ , dal valore minimo  $-\sqrt{\alpha_3/\beta_3} = J_2(0)$  al valore massimo  $\sqrt{\alpha_3/\beta_3} = J_2(T/2)$ . La legge oraria (o meglio la sua inversa) ed il periodo del moto si ricavano dalla (4.3.18) come nel caso dei moti unidimensionali conservativi, risolvendo l'equazione per separazione delle variabili, nella forma  $t = t(J_2)$ .

ii)  $2EI_2 < A^2 < 2EI_3$ .

In tal caso il raggio della sfera è compreso fra il semiasse maggiore e quello intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che girano (sulla superficie dell'ellissoide) intorno all'asse  $\zeta$ , vedi Fig. 22.

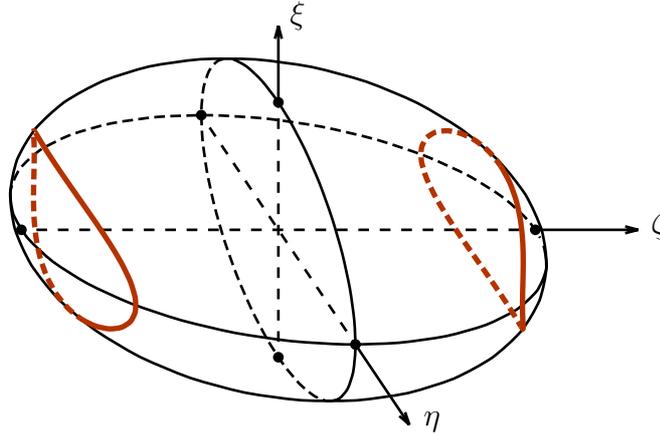


Figura 22: Traiettorie nel caso  $2EI_2 < J^2 < 2EI_3$ .

Procedendo come al punto i), si dimostra che le due curve corrispondono a moti periodici, di cui è possibile determinare la legge oraria ed il periodo,

usando ancora la (4.3.18), che differisce solo per i valori delle costanti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ . Si noti che, in accordo con il fatto che ora è  $J_3$  ad avere segno fissato sulle traiettorie, queste costanti soddisfano in questo caso la condizione  $\alpha_1/\beta_1 < \alpha_3/\beta_3$

iii)  $A^2 = 2EI_2$ .

In tal caso il raggio della sfera è uguale al semiasse intermedio dell'ellissoide, per cui l'intersezione è costituita da due curve chiuse, che si intersecano nei due punti dell'ellissoide che stanno sull'asse  $\eta$ , vedi Fig. 23.

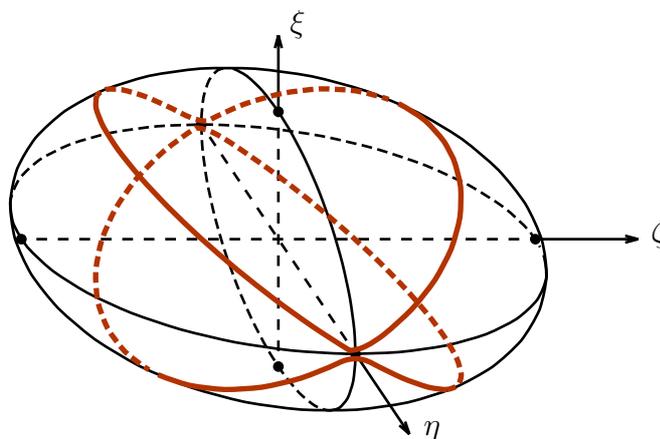


Figura 23: Traiettorie nel caso  $A^2 = 2EI_2$ .

Poiché questi due punti corrispondono a stati di equilibrio, ragionando come nel §1.1 si dimostra che l'intersezione contiene, oltre ai punti di equilibrio, quattro traiettorie diverse, che corrispondono ad altrettante classi di moti (individuati a meno di una traslazione temporale) che tendono asintoticamente, nel passato e nel futuro, ai due stati di equilibrio. È facile dedurre dalla figura che, su queste traiettorie,  $J_1(t)$  e  $J_3(t)$  hanno segno costante, al pari di  $\dot{J}_2(t)$  e che  $J_2(t)$  è determinata dall'equazione differenziale (4.3.18), dove però le costanti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  soddisfano la condizione  $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_3/\beta_3$ . Con un pò di semplice algebra, si può anzi provare che

$$\dot{J}_2 = \gamma(A^2 - J_2^2) \quad , \quad \gamma = \sqrt{(I_2^{-1} - I_3^{-1})(I_1^{-1} - I_2^{-1})} . \quad (4.3.19)$$

Questa equazione si risolve facilmente in modo esplicito per separazione delle variabili. La soluzione con  $J_2(0) = 0$  è data da

$$J_2(t) = A \tanh(\gamma At) . \quad (4.3.20)$$

Passiamo ora alla discussione di come la soluzione delle equazioni di Eulero possa essere utilizzata per determinare i moti del corpo rigido  $\Gamma$  in funzione

dei dati iniziali. Supponiamo pertanto che sia fissato un riferimento  $\bar{\mathcal{S}}$  e che, all'istante  $t = 0$ , sia data la trasformazione ortogonale  $\bar{R}$  che individua la posizione del riferimento solidale  $\mathcal{S}'$  in  $\bar{\mathcal{S}}$ , insieme alla velocità angolare  $\bar{\omega}(0)$ . Se  $\bar{\omega}(0)$  è diretto come uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ , sappiamo dalla discussione precedente che  $\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(0)$ ; pertanto il moto è una rotazione uniforme di velocità angolare  $\bar{\omega}(0)$ .

Supponiamo ora che  $\bar{\omega}(0)$  non sia diretto come uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$ . Se  $\bar{\omega}(0)$  e  $\bar{j}$  sono le coordinate in  $\bar{\mathcal{S}}$  di  $\bar{\omega}(0)$  e  $\bar{j}$ , si ha

$$\bar{j} = \bar{R}J(0) = \bar{R} \mathbb{I} \Omega(0) = \bar{R} \mathbb{I} \bar{R}^T \bar{\omega} ; \quad (4.3.21)$$

pertanto nemmeno  $\bar{j}$  è diretto come uno degli assi coordinati di  $\mathcal{S}'$  ed è quindi possibile, almeno in un intorno di  $t = 0$ , descrivere il moto del sistema tramite gli angoli di Eulero in un riferimento fisso  $\mathcal{S}$ , il cui asse  $z$  è diretto come  $\bar{j}$ . Il vantaggio di questa scelta è nelle seguenti relazioni fra gli angoli di Eulero e le funzioni  $J(t)$ , che si ottengono proiettando  $\bar{j}$  sugli assi di  $\mathcal{S}'$ .

$$\begin{aligned} J_1(t) &= A \sin \theta(t) \sin \psi(t) , \\ J_2(t) &= A \sin \theta(t) \cos \psi(t) , \\ J_3(t) &= A \cos \theta(t) . \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Per dimostrare queste relazioni basta osservare la Fig. 19 e notare che la proiezione di  $\bar{j}$  sul piano  $(\xi\eta)$  ha modulo  $A \sin \theta$  e forma un angolo  $\pi/2 - \psi$  con l'asse  $\xi$ , mentre la proiezione sull'asse  $\zeta$  è uguale a  $A \cos \theta$ .

Poiché, come abbiamo mostrato precedentemente,  $|J_3(t)|/A < 1$  per ogni  $t$ , la terza delle (4.3.22) implica che  $\sin \theta(t) > 0$  per ogni  $t$ ; pertanto gli angoli di Eulero sono ben definiti sempre e  $\theta(t) = \arccos J_3(t)$  è una funzione periodica, dello stesso periodo di  $J(t)$ . La funzione  $\psi(t)$  può essere calcolata usando le prime due delle (4.3.22), che implicano la relazione

$$\tan \psi(t) = \frac{J_2(t)}{J_1(t)} . \quad (4.3.23)$$

Se  $J_1(t) \neq 0$  per ogni  $t$ , come succede per esempio nelle soluzioni delle (4.3.14) studiate al punto i), allora  $\psi(t) = \arctan(J_2(t)/J_1(t))$  o  $\psi(t) = \arctan(J_2(t)/J_1(t)) + \pi$ , a seconda che il segno di  $J_1$  (e quindi quello di  $\sin \psi$ ) sia positivo o negativo; in particolare  $\psi(t)$  è una funzione periodica, dello stesso periodo di  $J(t)$ . Se invece  $J_1(t)$  non ha segno costante, come nelle soluzioni studiate al punto ii), la (4.3) deve essere risolta in modo che  $\psi(t)$  sia una funzione continua; è facile vedere, studiando i segni di  $J_1(t)$  e  $J_2(t)$ , che  $\psi(t)$  deve incrementarsi di  $2\pi$  in un periodo delle funzioni  $J(t)$ . Poiché  $\psi$  è un angolo, anche in questo caso  $\psi(t)$  è una funzione periodica dello stesso periodo di  $J(t)$ .

Rimane da studiare la funzione  $\varphi(t)$ . Poiché non esiste alcuna relazione che mette in relazione direttamente  $\varphi$  con gli altri angoli di Eulero e con  $J$ ,

facciamo ricorso alle (3.2.10) per esprimere  $\dot{\varphi}(t)$  in funzione delle grandezze già calcolate. Si ha:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin \psi \Omega_1 + \cos \psi \Omega_2}{\sin \theta} = A \frac{I_1^{-1} J_1^2 + I_2^{-1} J_2^2}{J_1^2 + J_2^2}, \quad (4.3.24)$$

avendo usato nel secondo passaggio anche le (4.3.22). Pertanto  $\dot{\varphi}(t)$  è una funzione periodica dello stesso periodo di  $J(t)$ , positiva per ogni  $t$ . Ne segue, ragionando come nell'esempio 2.4.2 del par. 2.4, che la trasformazione ortogonale  $R(t)$ , che descrive il moto di  $\Gamma$ , è una funzione quasiperiodica con due periodi, uno eguale al periodo  $T$  della soluzione delle (4.3.14), l'altro dato dall'equazione

$$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{\varphi}(t). \quad (4.3.25)$$

#### 4.4 La trottola pesante.

Un altro problema che può risolversi completamente è quello dei moti della trottola ( $I_1 = I_2 = I \neq I_3$ ) con un punto fisso diverso dal baricentro, soggetta alla forza peso. In tal caso il momento angolare non è conservato, ma esiste una direzione privilegiata, quella della verticale, per cui è naturale impostare il problema, usando come variabili lagrangiane gli angoli di Eulero rispetto ad un riferimento fisso  $\mathcal{S}$ , il cui asse  $z$  è diretto come la verticale, vedi Fig. 24.

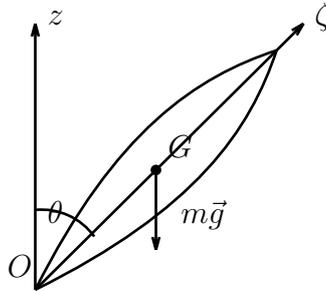


Figura 24: Trottola pesante.

La Lagrangiana del sistema si ottiene aggiungendo all'espressione (4.3.1) dell'energia cinetica l'energia potenziale, che coincide con l'energia potenziale di una particella di massa eguale alla massa  $m$  del corpo rigido  $\Gamma$ , posta nel baricentro  $G$  di  $\Gamma$ . Si ha pertanto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta, \quad (4.4.1)$$

se  $l$  indica la distanza di  $G$  da  $O$ .

Si noti che le variabili  $\psi$  e  $\phi$  sono variabili cicliche, come nel caso della trottola priva di peso; pertanto i momenti coniugati  $p_\psi$  e  $p_\phi$  definiti in (4.3.3) e (4.3.2) sono ancora delle costanti del moto. Possiamo allora esprimere  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  in funzione di  $p_\psi$  e  $p_\phi$  e sostituire le espressioni trovate nell'equazione che esprime la conservazione dell'energia, ottenendo l'equazione

$$E' \equiv E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta . \quad (4.4.2)$$

Poiché  $E'$ , al pari di  $E$ , è una costante del moto, ci siamo ridotti ad un problema unidimensionale conservativo nella variabile  $\theta$ , che può essere studiato con i metodi sviluppati nel par. 1.1. Pertanto la funzione  $\theta(t)$  si determina studiando la funzione

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta , \quad (4.4.3)$$

il *potenziale efficace* del nostro problema. Bisogna distinguere due casi,  $|p_\psi| \neq |p_\phi|$  e  $|p_\psi| = |p_\phi|$ .

a)  $|p_\psi| \neq |p_\phi|$ .

In tal caso, poiché  $V_{eff}(\theta)$  diverge per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , i valori di  $\theta(t)$  devono essere contenuti in un intervallo  $[\theta_1, \theta_2] \subset (0, \pi)$ , individuato dalla condizione che  $E' - V_{eff}(\theta)$  è positivo all'interno dell'intervallo ed è nullo negli estremi; ciò implica in particolare che gli angoli di Eulero sono ben definiti per ogni  $t$ . Facciamo vedere che l'intervallo  $[\theta_1, \theta_2]$  è univocamente individuato, cioè che l'equazione  $E' - V_{eff}(\theta) = 0$  ammette al più due soluzioni in  $(0, \pi)$ . Per dimostrarlo è sufficiente notare che, se si pone  $u = \cos \theta$ ,  $u_i = \cos \theta_i$ , l'intervallo  $[\theta_1, \theta_2]$  è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo  $[u_2, u_1] \subset (-1, +1)$ , essendo  $u_1$  e  $u_2$  soluzioni dell'equazione

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (b - au)^2 = 0 , \quad (4.4.4)$$

con

$$\alpha = \frac{2E'}{I} , \quad \beta = \frac{2mgl}{I} , \quad a = \frac{p_\psi}{I} , \quad b = \frac{p_\phi}{I} . \quad (4.4.5)$$

La (4.4.4) è un'equazione algebrica di terzo grado a coefficienti reali, pertanto ha almeno una e al più tre soluzioni reali differenti. Inoltre,  $f(u) \rightarrow \pm\infty$  per  $u \rightarrow \pm\infty$ , poiché  $\beta > 0$ , e  $f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$ ; ne segue che una soluzione è certamente maggiore di 1 e non c'è nessuna soluzione con  $u < 1$ . D'altra parte, c'è sicuramente una soluzione reale in  $(-1, 1)$ , poiché, se  $u_0 = \cos \theta(0)$ , la (4.4.2) implica che  $f(u_0) = (1 - u_0^2)\dot{\theta}(0)^2 \geq 0$ . Si può pertanto concludere che ci sono solo due soluzioni reali, eventualmente coincidenti,  $u_2 \leq u_1$  nell'intervallo  $(-1, 1)$ , vedi Fig. 25

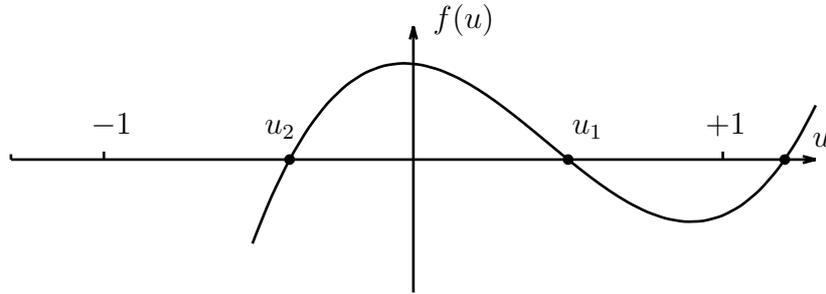


Figura 25: Grafico di  $f(u)$ .

Ne segue che  $V_{eff}(\theta)$  ha un solo punto di stazionarietà  $\theta_0$  nell'intervallo  $(0, \pi)$ , che è anche un punto di minimo assoluto. Pertanto la funzione  $\theta(t)$  è una funzione periodica per ogni valore di  $E' > V_{eff}(\theta_0)$ , di periodo

$$T_0 = 2 \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} , \quad (4.4.6)$$

mentre è costante (con valore  $\theta_0$ ), se  $E' = V_{eff}(\theta_0)$ .

Per completare la descrizione del moto, dobbiamo determinare le funzioni  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$ . Usando le (4.3.3) e (4.3.2), insieme alla (4.4.5), è facile vedere che

$$\dot{\varphi} = \frac{b - au}{1 - u^2} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{I}{I_3} a - u\dot{\varphi} . \quad (4.4.7)$$

Pertanto  $\dot{\varphi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  sono anch'esse funzioni periodiche di periodo  $T_0$ , se  $E' > V_{eff}(\theta_0)$ , o funzioni costanti se  $E' = V_{eff}(\theta_0)$ . Ne segue, ragionando come nell'esempio 2.4.2 del par. 2.4, che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega_1 t + S_1(t) \quad , \quad \psi(t) = \psi(0) + \omega_2 t + S_2(t) , \quad (4.4.8)$$

$S_1(t)$  e  $S_2(t)$  essendo due funzioni periodiche di periodo  $T_0$  a media nulla e nulle in  $t = 0$ , mentre  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono i valori medi di  $\dot{\varphi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  nell'intervallo  $[0, T_0]$ . Poiché la matrice ortogonale  $R(t)$  che descrive il moto della trottola è periodica negli angoli di Eulero, i suoi elementi di matrice sono funzioni quasiperiodiche di  $t$ , con periodi  $T_0$ ,  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  e  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ .

Si noti che, se  $E' = V_{eff}(\theta_0)$ ,  $S_1(t) = S_2(t) = 0$ , poiché  $\dot{\varphi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  sono costanti, e che  $\omega_1 \neq 0$ . Quest'ultima affermazione segue dall'osservazione che, se fosse possibile soddisfare contemporaneamente le condizioni  $\dot{\theta}(t) = 0$  e  $\dot{\varphi}(t) = 0$ , allora  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ ; quindi  $u_0 = \cos \theta_0$  sarebbe uno zero doppio di  $f(u)$ , cioè  $f'(u_0) = 0$ . Tuttavia, la prima delle (4.4.7) implica che  $b = au_0$ , mentre le (4.4.5) e la (4.4.2) implicano che  $\alpha = \beta u_0$ ; ne segue che  $f'(u_0) = -\beta(1 - u_0)^2 < 0$ , che è incompatibile con l'ipotesi di partenza.

I risultati precedenti possono descriversi geometricamente in modo molto semplice in termini dell'intersezione  $\mathcal{C}$  dell'asse di simmetria dell'ellissoide d'inerzia della trottola (l'asse  $\zeta$  del sistema solidale) con la sfera  $\Sigma$  di raggio 1 e centro 0 del sistema fisso  $\mathcal{S}$ . Questa intersezione è una curva che si avvolge intorno all'asse  $z$ , compresa fra i "paralleli"  $\theta = \theta_1$  e  $\theta = \theta_2$ . Bisogna distinguere tre casi, a secondo che, posto  $u^* = b/a$ ,  $u^* \notin [u_2, u_1]$ ,  $u^* \in (u_2, u_1)$  oppure  $u^* = u_1$ .

Se  $u^* \notin [u_2, u_1]$ , la prima delle (4.4.7) implica che  $\dot{\varphi}(t)$  ha segno costante, per cui un tratto abbastanza lungo della curva  $\mathcal{C}$  appare come nel grafico di sinistra di Fig. 26. Si ha un moto di precessione dell'asse  $\zeta$  intorno all'asse  $z$  con velocità angolare variabile ma di segno costante, accompagnato da un moto di *nutazione*, come viene chiamata la variazione dell'angolo  $\theta$ . Si noti che tale moto non è in generale periodico, pertanto la curva  $\mathcal{C}$  non è in generale chiusa. Perché ciò avvenga è infatti necessario che esista un tempo  $T$  tale che  $\theta(T) = \theta(0)$  e  $\dot{\theta}(T) = \dot{\theta}(0)$  e  $\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi n_1$ , con  $n_1$  intero. La prima condizione implica che  $T = n_0 T_0$ , con  $n_0$  intero, mentre la seconda, usando la (4.4.8) e notando che  $S_1(n_0 T_0) = S_1(0) = 0$ , implica che  $T = n_1 T_1$ . Ne segue che il moto dell'asse è periodico se e solo se  $T_1/T_0$  è un numero razionale. Se ciò non succede, si può dimostrare che la curva  $\mathcal{C}$  è addirittura densa nella regione compresa fra i paralleli  $\theta = \theta_1$  e  $\theta = \theta_2$ .

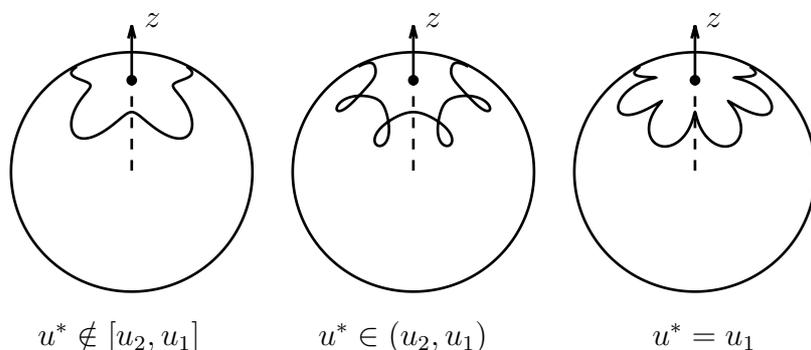


Figura 26: Moto dell'intersezione dell'asse  $\zeta$  con la sfera unitaria di  $\mathcal{S}$ .

Se  $u^* \in (u_2, u_1)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  si annulla quando  $\cos \theta(t) = u^*$  e si ha la situazione descritta nel disegno centrale di Fig. 26, caratterizzata dal fatto che la curva  $\mathcal{C}$  forma dei nodi, uno in ogni intervallo di tempo di lunghezza  $T_0$ , dovuti al fatto che l'angolo  $\varphi(t)$  è una funzione crescente di  $t$ , quando  $\cos \theta(t) < u^*$ , mentre è decrescente quando  $\cos \theta(t) > u^*$ . Si noti tuttavia che, se  $\omega_1 \neq 0$  (come si è supposto in figura),  $\varphi(t)$  si incrementa di una quantità  $\omega_1 T_0 \neq 0$  nel tempo  $T_0$ , per cui l'asse  $\zeta$  ha comunque un moto medio di precessione intorno all'asse  $z$ .

Se infine  $u^* = u_1$  o  $u^* = u_2$ , il segno di  $\dot{\varphi}(t)$  è costante, ma  $\dot{\varphi}(t)$  si annulla

quando  $\theta(t) = \theta_1$  o  $\theta(t) = \theta_2$ , rispettivamente. La curva  $\mathcal{C}$  è della forma indicata (nel caso  $u^* = u_1$ ) nel disegno di destra di Fig. 26.

L'ultimo caso si presenta in particolare quando si studia il problema della *trottola veloce*, quando si studia cioè il moto di una trottola posta inizialmente in rotazione veloce intorno al suo asse di simmetria, che forma un angolo piccolo ma maggiore di zero con l'asse  $z$ . Le condizioni iniziali di questo problema sono, escluse quelle su  $\varphi(0)$  e  $\psi(0)$ , che non hanno ovviamente alcun ruolo nel determinare le proprietà qualitative del moto,

$$\theta(0) = \theta_0 > 0 \quad , \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad , \quad \dot{\psi}(0) = \gamma \quad , \quad (4.4.9)$$

e si è interessati al comportamento della soluzione per  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Usando le (4.3.2), (4.3.3), (4.4.2) e (4.4.5), è facile vedere che

$$a = \frac{I_3}{I_1} \gamma \quad , \quad b = a \cos \theta_0 \quad , \quad \alpha = \beta \cos \theta_0 \quad , \quad (4.4.10)$$

così che  $f(u)$  assume la forma

$$f(u) = \beta(u_0 - u)[1 - u^2 - \lambda(u_0 - u)] \quad , \quad \lambda = \frac{a^2}{\beta} \quad , \quad (4.4.11)$$

la quale implica in particolare che  $u_0$  è uno degli estremi dell'intervallo  $[u_2, u_1]$  cui appartiene  $u(t) = \cos \theta(t)$ , vedi Fig. 25. D'altra parte è evidente che inizialmente  $\theta(t)$  deve diminuire (la trottola tende a cadere sotto la forza di gravità), per cui  $u_0 = u_1$  ed  $u_2$  è la radice più piccola dell'equazione di secondo grado  $1 - u^2 - \lambda(u_0 - u) = 0$ ; un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} u_0 - u_2 &= \frac{1}{2} \left[ -(\lambda - 2u_0) + \sqrt{(\lambda - 2u_0)^2 + 4(1 - u_0)^2} \right] = \\ &= \frac{2(1 - u_0)^2}{(\lambda - 2u_0) + \sqrt{(\lambda - 2u_0)^2 + 4(1 - u_0)^2}} \quad . \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Quindi l'ampiezza dell'oscillazione di  $u(t)$ , che è eguale a  $u_0 - u_2$ , tende a zero per  $\lambda \rightarrow \infty$ , quindi anche per  $\gamma \rightarrow \infty$ , e si vede subito che  $u_0 - u_2 = \sin^2 \theta_0 / \lambda + O(\lambda^{-2})$ . Pertanto anche l'ampiezza  $\delta = \theta_2 - \theta_1$  del moto di nutazione tende a zero per  $\lambda \rightarrow \infty$ ; poiché  $u_0 - u_2 = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + \delta) = \delta \sin \theta_0 + O(\delta^2)$ , si ha, più precisamente,

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\sin \theta_0}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{\beta I_1^2}{i_3^2} \frac{1}{\gamma^2} + O\left(\frac{1}{\gamma^4}\right) \quad . \quad (4.4.13)$$

Per quel che riguarda il periodo  $T_0$  del moto, si noti che esso è eguale al periodo della funzione  $x(t) = u_0 - u(t)$ , che soddisfa, come è facile verificare, l'equazione

$$\dot{x}^2 = -V(x) \quad , \quad V(x) = \beta x[x^2 + x(\lambda - 2u_0) - (1 - u_0)^2] \quad . \quad (4.4.14)$$

$T_0$  è pertanto eguale al periodo del moto di una particella di massa  $m = 2$  ed energia  $E = 0$ , che si muove sotto l'azione di una forza di energia potenziale  $V(x)$ . Tale moto si svolge nell'intervallo  $[0, x_2 = u_0 - u_2]$ ; pertanto, usando la (1.2.3) ed il ragionamento impiegato nella dimostrazione della Prop. 1.2.2, si ottiene la stima

$$2\pi \sqrt{\frac{2}{\max_{0 \leq x \leq x_2} V''(x)}} \leq T_0 \leq \sqrt{\frac{2}{\min_{0 \leq x \leq x_2} V''(x)}}. \quad (4.4.15)$$

D'altra parte  $V''(x) = 6\beta x + 2\beta(\lambda - 2u_0)$ ; ne segue facilmente che

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\beta\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)} = \frac{I_1}{I_3} \frac{1}{\gamma} + O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}\right). \quad (4.4.16)$$

Infine, usando le (4.4.7), si trova che  $\dot{\varphi}(t)$  ha lo stesso segno di  $\gamma$  e che, per  $\gamma \rightarrow \infty$ ,

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right), \quad \dot{\psi}(t) = \gamma + O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right). \quad (4.4.17)$$

I risultati precedenti possono descriversi dicendo che, se  $\gamma$  è molto grande, l'asse di simmetria della trottola gira molto lentamente intorno all'asse  $z$ , con un moto di nutazione di ampiezza molto piccola, mentre la trottola gira molto velocemente intorno ad esso. Si tratta di un fenomeno ben noto a chiunque abbia giocato con una ... trottola.

b)  $|p_\varphi| = |p_\psi|$ .

Sotto questa ipotesi il potenziale efficace (4.4.3) diverge solo in  $\theta = \pi$ , se  $p_\varphi = p_\psi$ , o in  $\theta = 0$ , se  $p_\varphi = -p_\psi$ . Consideriamo in dettaglio il caso  $p_\varphi = p_\psi$ ; l'altro caso si tratta in modo simile. Il potenziale efficace assume allora, come è facile verificare, la forma

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} I_1 a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} + mgl \cos \theta, \quad (4.4.18)$$

avendo definito  $a$  come prima. Ne segue che i valori dell'angolo  $\theta$  non sono più ristretti all'intervallo  $(0, \pi)$ , come richiesto dalla definizione degli angoli di Eulero, bensì all'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , se  $a \neq 0$ , o a tutto l'asse reale, se  $a = 0$ . Per continuare nell'analisi dei moti del sistema, bisogna pertanto determinare le funzioni  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  come funzioni regolari di  $t$ , eliminando ogni restrizione sui loro valori; essendo la matrice  $R(t)$ , che individua la posizione della trottola in  $\mathcal{S}$ , una funzione regolare degli angoli di Eulero, si otterrà in questo modo la legge del moto corretta. In altre parole, la definizione degli angoli di Eulero deve essere opportunamente modificata quando  $\theta(t)$  passa per il valore  $\theta = 0$ , in modo che  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  siano delle funzioni continue; ciò implica in particolare che i valori di  $\varphi$  e  $\psi$  sono definiti univocamente anche nelle configurazioni con  $\theta = 0$ .

Il caso  $a = 0$  è banale. Infatti, se  $p_\varphi = p_\psi = 0$ , le (4.3.2) e (4.3.3) implicano che

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = 0 \quad , \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = 0 . \quad (4.4.19)$$

Queste condizioni possono essere verificate in due modi diversi. La prima possibilità è che  $\sin \theta(t) = 0$  per ogni  $t$ , ma  $\dot{\varphi}(t)$  non è identicamente nulla. Essa deve però essere scartata, in quanto gli angoli  $\varphi$  e  $\psi$  non sarebbero definiti per nessun valore di  $t$ , per cui le funzioni  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  sarebbero del tutto arbitrarie. Si può tuttavia dimostrare rigorosamente per altra via l'esistenza di moti in cui l'asse  $\zeta$  mantiene la stessa direzione dell'asse  $z$  per tutti i tempi, con il verso concorde o discorde, così che  $\theta(t) = 0$  o  $\theta(t) = \pi$  per ogni  $t$ . Si può procedere, per esempio, come nello studio dei moti per il corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze, descrivendo il moto tramite le componenti del momento angolare nel sistema solidale. Le equazioni di Eulero (4.3.14) si modificano per la presenza a secondo membro di un termine connesso al momento della forza peso rispetto al punto fisso. Tuttavia, poiché tale termine è nullo per i moti con  $J_1 = J_2 = 0$ , esiste ancora una soluzione costante corrispondente a rotazioni uniformi intorno all'asse  $z$ .

Rimane la possibilità che  $a = 0$ , ma  $\sin \theta(t)$  non è identicamente nullo. Non è restrittivo allora supporre che  $\sin \theta(0) \neq 0$  (basta scegliere opportunamente l'istante iniziale). Le (4.4.19) implicano che  $\dot{\varphi}(t) = \dot{\psi}(t) = 0$ ; quindi la trottola non ruota intorno al suo asse e questo si muove in un piano fisso, determinato dal valore di  $\varphi(0)$ . Si hanno insomma gli stessi moti di un pendolo vincolato a muoversi in un piano, visto che  $V_{eff}(\theta) = mgl \cos \theta$ .

Passiamo ora a considerare il caso  $a \neq 0$ , escludendo nuovamente le soluzioni tali che  $\theta(t) = 0$  per ogni  $t$ . Poiché  $V_{eff}(\theta)$  diverge per  $\theta \rightarrow \pm\pi$ , la forma di  $V_{eff}(\theta)$  è determinata dal numero e dalla posizione dei suoi punti di stazionarietà. Si ha

$$V'_{eff}(\theta) = \frac{1}{4} I_1 a^2 \sin \theta \left[ \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \lambda \right] \quad , \quad \lambda = \frac{4mgl}{I_1 a^2} . \quad (4.4.20)$$

Ne segue che, se  $\lambda \leq 1$ , esiste un solo punto di stazionarietà, che è necessariamente un punto di minimo, in  $\theta = 0$ . Se invece  $\lambda > 1$ , oltre a  $\theta = 0$ , ci sono altri due punti di stazionarietà in  $\theta = \pm\theta^*$ , con  $\theta^* = \arccos \lambda^{-1/4}$ ;  $\theta = 0$  deve allora essere un punto di massimo, mentre gli altri due punti sono punti di minimo, vedi Fig. 27.

La teoria dei moti unidimensionali conservativi ci permette di concludere che, se  $\lambda \leq 1$ ,  $\theta(t)$  è sempre una funzione periodica. Se invece  $\lambda > 1$ , ci sono, oltre alle soluzioni periodiche, due soluzioni costanti,  $\theta(t) = \theta^*$  e  $\theta(t) = -\theta^*$ , e due famiglie di soluzioni non periodiche, tali che  $E' = V_{eff}(0)$  e  $\theta(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ . Si noti che, se  $E' \leq V_{eff}(0)$ , le soluzioni per cui  $\theta(t) \in [-\pi, 0]$  descrivono gli stessi moti di quelle con  $\theta(t) \in [0, \pi]$ , ma con una diversa definizione degli angoli di Eulero.

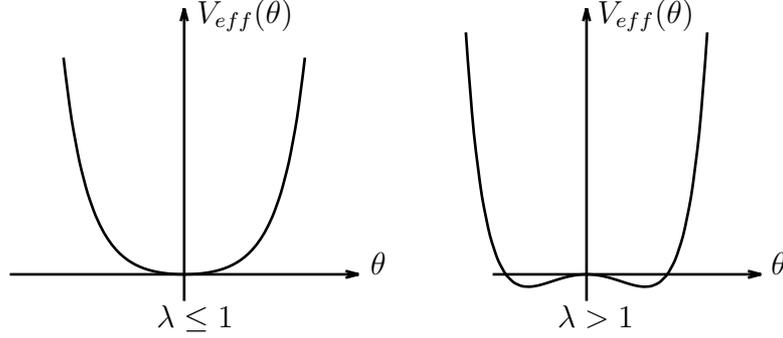


Figura 27: Grafico di  $V_{eff}(\theta) - V_{eff}(0)$  al variare di  $\lambda$ .

Le funzioni  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  si determinano come prima, usando le (4.4.7), che, se  $a = b = p_\psi/I$ , diventano (con alcuni semplici passaggi)

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\psi}{2I \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I} \left( \frac{I}{I_3} - \frac{1}{2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad , \quad (4.4.21)$$

per cui i moti sono tutti quasi periodici, eccetto quelli con  $\lambda > 1$  e  $E' = V_{eff}(0)$ , caratterizzati dal fatto che, per  $t \rightarrow \pm\infty$ , mentre l'asse della trottola tende ad allinearsi con l'asse  $z$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  tendono a dei valori asintotici

$$\dot{\varphi}_\infty = \frac{p_\psi}{2I} \quad , \quad \dot{\psi}_\infty = \frac{p_\psi}{I} \left( \frac{I}{I_3} - \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (4.4.22)$$

Questi sono naturalmente anche i valori che devono assumere  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  negli istanti in cui  $\theta(t) = 0$ , nel caso dei moti quasiperiodici.

Si noti ora che il problema unidimensionale per  $\theta(t)$  ammette anche, per ogni valore di  $\lambda$ , la soluzione costante  $\theta(t) = 0$ . Come abbiamo detto, questa soluzione deve essere scartata a priori, ma può essere utile associarle il moto in cui la trottola ruota intorno al suo asse, allineato con l'asse  $z$ , con velocità angolare  $\Omega_3$  costante (vedi discussione dopo la (4.4.19)), definendo opportunamente le funzioni  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$ . Ciò può essere fatto ponendo  $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_\infty$  e  $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_\infty$ , con  $\Omega_3 = p_\psi/I_3$ . Questa scelta garantisce, per l'osservazione che segue la (4.4.22), che, quando  $\lambda \leq 1$ , le leggi orari degli angoli di Eulero convergono, per  $E' - V_{eff}(0) \rightarrow 0$ , a quelle del moto con  $\theta(t) = 0$ . Ci si può allora porre il problema della stabilità di questo moto, ci si può cioè chiedere come varia il moto della trottola se si perturbano le condizioni iniziali; questo problema è di solito indicato come il problema della *trottola dormiente*.

Nel caso  $\lambda > 1$  la risposta è molto facile: il moto con  $\theta(t) = 0$  è instabile, in quanto ciò è vero già per il problema unidimensionale nella variabile  $\theta$ , quando ci si limita a perturbazioni che preservano la condizione  $p_\varphi = p_\psi$ . Se invece  $\lambda < 1$ , il problema posto è più sottile, in quanto è essenziale tenere conto del fatto che la forma del potenziale efficace dipende dai dati iniziali. Se

ci si limita a perturbazioni che conservano la condizione  $p_\varphi = p_\psi$ , il potenziale varia poco e mantiene la stessa forma, con un minimo in  $\theta = 0$ ; pertanto il moto con  $\theta(t) = 0$  appare stabile per il problema unidimensionale relativo a  $\theta$  ed è facile vedere che ciò vale anche se si tiene conto delle variazioni degli altri due angoli. È tuttavia possibile perturbare i dati iniziali così che  $p_\varphi - p_\psi$  è piccolo ma diverso da 0. In tal caso, la forma del potenziale efficace si modifica radicalmente, in quanto nasce una singolarità in  $\theta = 0$ , vedi Fig. 28, ed il grafico del potenziale si sdoppia in due curve con minimo in  $\theta = \pm\theta^*$ . La curva di destra è ovviamente della stessa forma di quella considerata nel punto a), mentre quella di sinistra, riflessa della prima rispetto all'asse delle ordinate, è quella che si otterrebbe se si definisse l'angolo  $\theta$  con valori in  $(-\pi, 0)$ . Pertanto il moto perturbato si svolge nell'intorno di  $\theta^*$  ed è facile convincersi che  $\theta^* \rightarrow 0$  se la perturbazione tende a 0, mentre  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow \dot{\varphi}_\infty$  e  $\dot{\psi}(t) \rightarrow \dot{\psi}_\infty$ . Quindi il moto con  $\theta(t) = 0$  è stabile.

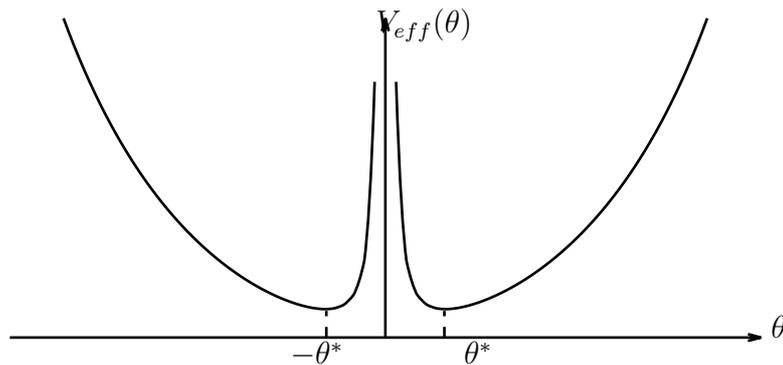


Figura 28: Grafico di  $V_{eff}(\theta)$  per  $p_\varphi - p_\psi$  piccolo ma non nullo.

## 5 Meccanica analitica

### 5.1 Equazioni di Hamilton

Sia  $\mathcal{L}(q, \eta, t)$  una funzione regolare definita in un aperto  $U \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  ( $q, \eta \in \mathbb{R}^l, t \in \mathbb{R}$ ) e supponiamo che la matrice

$$h_{ij}(q, \eta, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(q, \eta, t) \quad (5.1.1)$$

abbia determinante non nullo in  $U$ . Allora è possibile risolvere rispetto alle variabili  $\eta$  il sistema di equazioni

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i}(q, \eta, t) \quad (5.1.2)$$

e, detta  $\eta = \alpha(q, p, t)$  la soluzione, esiste un aperto  $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  ed un diffeomorfismo regolare  $\Phi : U \mapsto V$ , tale che

$$\Phi(q, \eta, t) = (q, p, t) \quad , \quad \Phi^{-1}(q, p, t) = (q, \alpha(q, p, t), t) \quad (5.1.3)$$

Sull'insieme  $V$  definiamo allora una funzione  $H(q, p, t)$ , l'*Hamiltoniana* corrispondente alla Lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \eta, t)$ , tramite la

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^l p_i \alpha_i(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \alpha(q, p, t), t) \quad (5.1.4)$$

$H(q, p, t)$  è ovviamente anch'essa una funzione regolare e vale la seguente proposizione.

**Proposizione 5.1.1** *Se  $q(t)$  è una soluzione in  $U$  delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \eta, t)$  e  $p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i}(q(t), \dot{q}(t), t)$ , allora  $q(t)$  e  $p(t)$  sono soluzione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t), t) \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t), t) \end{cases} \quad (5.1.5)$$

**Dim.** - Usando la definizione di  $p(t)$ , le equazioni di Lagrange possono scriversi nella forma

$$\dot{p}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (5.1.6)$$

D'altra parte, dalla (5.1.4) segue che

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^l p_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (5.1.7)$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio, la (5.1.2). La prima delle (5.1.5) segue immediatamente dalle (5.1.6) e (5.1.7).

La seconda delle (5.1.5) segue dall'osservazione che  $\dot{q}(t) = \alpha(q(t), p(t), t)$ , per la (5.1.3) e la definizione di  $p(t)$ , e dalla

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \alpha_i + \sum_{j=1}^l p_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i} = \alpha_i \quad (5.1.8)$$

■

Le equazioni (5.1.5) si chiamano *Equazioni di Hamilton* relative all'Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ . Si noti che si tratta di equazioni differenziali in forma normale, per cui ad esse si applica direttamente il teorema di esistenza ed unicità locale.

La Prop. 5.1.1 può essere invertita. Sia  $H(q, p, t)$  una funzione regolare definita in un aperto  $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  e supponiamo che la matrice

$$h'_{ij}(q, p, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(q, p, t) \quad (5.1.9)$$

abbia determinante non nullo in  $V$ . Allora è possibile risolvere rispetto alle variabili  $p$  il sistema di equazioni

$$\eta_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, t) \quad (5.1.10)$$

e, detta  $p = \beta(q, \eta, t)$  la soluzione, esiste un aperto  $U \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  ed un diffeomorfismo  $\Psi : V \mapsto U$ , tale che

$$\Psi(q, p, t) = (q, \eta, t) \quad , \quad \Psi^{-1}(q, \eta, t) = (q, \beta(q, \eta, t), t) \quad (5.1.11)$$

Procedendo come nella dimostrazione della Prop. 5.1.1, è facile dimostrare la proposizione seguente.

**Proposizione 5.1.2** *Se  $(q(t), p(t))$  è una soluzione in  $V$  delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , allora  $q(t)$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \eta, t) = \sum_{i=1}^l \eta_i \beta_i(q, \eta, t) - H(q, \beta(q, \eta, t), t) \quad (5.1.12)$$

Nel caso di un sistema meccanico soggetto a vincoli ideali e forze attive conservative, la Lagrangiana è una funzione indipendente dal tempo della forma

$$\mathcal{L}(q, \eta) = T(q, \eta) - V(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l g_{ij}(q) \eta_i \eta_j - V(q) \quad (5.1.13)$$

Inoltre  $g_{ij}(q)$  è una matrice definita positiva, quindi invertibile. Ne segue che  $p_i = \sum_{j=1, \dots, l} g_{ij} \eta_j$  e che queste equazioni possono essere invertite. Pertanto esiste l'Hamiltoniana corrispondente è

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l g_{ij}^{-1}(q) p_i p_j + V(q) = T(q, p) + V(q) \quad (5.1.14)$$

Si noti che l'Hamiltoniana coincide in questo caso con l'energia del sistema ed è quindi, come sappiamo, un integrale del moto. Questa proprietà è in realtà un caso particolare di una proprietà più generale delle equazioni di Hamilton, descritta dalla proposizione seguente.

**Proposizione 5.1.3** *Se  $(q(t), p(t))$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , allora*

$$\frac{d}{dt} H[q(t), p(t), t] = \frac{\partial H}{\partial t} [q(t), p(t), t] \quad (5.1.15)$$

**Dim.** - Usando le (5.1.5), si trova

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H[q(t), p(t), t] &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^l (-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i) = \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

■

Si noti anche che, se si considera la funzione di  $\eta$

$$F(\eta) = \sum_{i=1}^l p_i \eta_i - \mathcal{L}(q, \eta, t) \quad (5.1.16)$$

parametrizzata da  $q, p, t$ , la (5.1.2) può essere vista come la condizione di annullamento del gradiente di  $F(\eta)$ . Pertanto i valori di  $\eta$  che soddisfano la (5.1.2) sono i punti di stazionarietà di  $F(\eta)$ . Nel caso della Lagrangiana (5.1.13), la matrice Hessiana in questi punti coincide con la matrice  $g_{ij}(q)$  cambiata di segno, pertanto è una matrice definita negativa. Ne segue che le soluzioni della (5.1.2) sono punti di massimo di  $F(\eta)$ , per cui la (5.1.4) può anche scriversi

$$H(q, p, t) = \max_{\eta \in \mathbb{R}^l} \left[ \sum_{i=1}^l p_i \eta_i - \mathcal{L}(q, \eta, t) \right] \quad (5.1.17)$$

Questa formula compare anche in altre applicazioni ed è detta *Trasformazione di Legendre*.

## 5.2 Principio di Hamilton

Le soluzioni delle equazioni di Hamilton soddisfano un principio variazionale simile al Principio di minima azione, valido per le soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Data l'Hamiltoniana regolare  $H(q, p, t)$  definita nell'aperto  $V$ , l'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  e i vettori  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{2l}$ , consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}$  delle funzioni  $x(t) = (q(t), p(t))$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , tali che  $(q(t), p(t), t) \in V$  e  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$  (ovviamente supponiamo che  $t_1, t_2, x_1, x_2$  siano definiti in modo che  $\mathcal{F}$  non sia vuoto). Indichiamo con  $X$  gli elementi di  $\mathcal{F}$  e definiamo su  $\mathcal{F}$  un funzionale  $S$ , ponendo

$$A(X) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_{i=1}^l p_i(t) \dot{q}_i(t) - H(q(t), p(t), t) \right] \quad (5.2.1)$$

Vale la seguente Proposizione.

**Proposizione 5.2.1**  *$X$  è un punto di stazionarietà di  $\mathcal{F}$  se e solo se  $q(t)$  e  $p(t)$  soddisfano le equazioni di Hamilton di Hamiltoniana  $H$ .*

**Dim.** - Supponiamo che  $x(t)$  sia una soluzione delle equazioni di Hamilton e consideriamo una curva regolare  $y(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [-\delta_y, \delta_y]$ ,  $\delta > 0$ , in  $\mathcal{F}$ , tale che  $y(0) = X$ . Per dimostrare che  $X$  è un punto di stazionarietà di  $A(X)$ , bisogna dimostrare che, comunque si scelga questa curva, la derivata in  $\varepsilon = 0$  della funzione  $f(\varepsilon) = A(y(\varepsilon))$  è nulla.

Si noti che, se si indica con  $y(\varepsilon, t) = (q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon))$  la funzione corrispondente a  $y(\varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon)$  soddisfa le condizioni  $y(t_i, \varepsilon) = x_i$ ,  $i = 1, 2$ , per ogni  $\varepsilon$ , per cui

$$\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}(t_i, \varepsilon) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.2.2)$$

D'altra parte, usando la (5.2.1) e la definizione di  $f(\varepsilon)$ , si ha

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \frac{\partial q_i}{\partial t}(t, \varepsilon) + p_i(t, \varepsilon) \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varepsilon \partial t}(t, \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon), t) \frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) - \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon), t) \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right] \end{aligned}$$

Se si integra per parti il termine con la derivata seconda di  $q(t, \varepsilon)$  e si usa la (5.2.2), si trova, ponendo  $\varepsilon = 0$  nell'espressione precedente ed usando il fatto che  $q(t, 0) = q(t)$ ,  $p(t, 0) = p(t)$ ,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^l \left\{ v_i(t) \left[ \dot{q}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t), t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - u_i(t) \left[ \dot{p}_i(t) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t), t) \right] \right\} \quad (5.2.3) \end{aligned}$$

avendo posto  $u(t) = \partial q / \partial \varepsilon(t, 0)$  e  $v(t) = \partial p / \partial \varepsilon(t, 0)$ . Ma, per ipotesi,  $q(t)$  e  $p(t)$  soddisfano le equazioni di Hamilton, per cui, quali che siano le funzioni  $u(t)$  e  $v(t)$ ,  $f'(0) = 0$ .

Supponiamo, viceversa, che  $X$  sia un punto di stazionarietà di  $A$ , cioè che la (5.2.3) sia verificata per ogni scelta della curva  $y(\varepsilon)$  in  $\mathcal{F}$ . Ciò implica che la (5.2.3) è verificata per ogni scelta delle funzioni  $u(t)$  e  $v(t)$ , soggette alla sola condizione di essere nulle in  $t_1$  e  $t_2$ , per la (5.2.2); per dimostrarlo, date  $u(t)$  e  $v(t)$ , si può, per esempio, porre  $q(t, \varepsilon) = q(t) + \varepsilon u(t)$  e  $p(t, \varepsilon) = p(t) + \varepsilon v(t)$ , con  $\varepsilon \in [-\delta_y, \delta_y]$  e  $\delta_y$  abbastanza piccolo perché  $(q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon), t) \in V$ . D'altra parte è facile dimostrare che l'integrale a secondo membro della (5.2.3) può essere nullo per ogni scelta di  $u(t)$  e  $v(t)$ , sia pure con la condizione che siano nulle negli estremi di integrazione, solo se le espressioni in parentesi quadra sono identicamente nulle, cioè solo se  $x(t)$  soddisfa le equazioni di Hamilton. ■

Si noti che, durante la dimostrazione, non si è mai usato il fatto che i valori di  $p(t)$  fossero fissati negli estremi dell'intervallo  $[t_1, t_2]$ ; la sola condizione essenziale era che fossero fissati i valori di  $q(t)$ . Del resto, le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono univocamente determinate assegnando i valori di  $q(t)$  e  $p(t)$  ad uno stesso istante, cioè assegnando  $2l$  condizioni, per cui non ci si può aspettare in generale che siano necessarie  $4l$  condizioni per individuare una soluzione, come avverrebbe se si fissassero i valori sia di  $q(t)$  che di  $p(t)$  in  $t_1$  e  $t_2$ . Si noti peraltro che le condizioni al bordo  $q(t_i) = q_i$ , per quanto sufficienti per formulare il Principio di Hamilton, non garantiscono in generale l'esistenza di una soluzione. Il Principio di Hamilton si limita a formulare una condizione equivalente all'esistenza.

La formulazione scelta del Principio di Hamilton è giustificata solo dall'uso che ne verrà fatto più avanti, nel par. 5.5.

### 5.3 Trasformazioni canoniche

Uno dei motivi principali di interesse nelle equazioni di Hamilton è la possibilità di definire una classe di trasformazioni che lasciano invarianti la forma delle equazioni. Queste trasformazioni coinvolgono sia le variabili  $q$  che le variabili  $p$ , per cui sono molto più generali dei cambiamenti di coordinate del formalismo Lagrangiano, che coinvolgono solo le variabili  $q$ , ma non le variabili  $\eta$ , che devono essere necessariamente associate nelle equazioni del moto alle  $\dot{q}$ .

**Definizione 5.3.1** *Sia  $H$  una funzione regolare su  $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  e sia*

$$(Q, P, t) = (F(q, p, t), G(q, p, t), t) \equiv C(q, p, t) \quad (5.3.1)$$

*un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$  di  $V$  in  $W = C(V)$  (si noti che questa trasformazione manda  $t$  in sé stesso, per cui si dice **isocrona**). Supponiamo inoltre*

che la matrice Jacobiana di  $C$  abbia determinante non nullo in tutto  $W$ , che su  $W$  sia definita una funzione regolare  $H'$  e che, se  $(q(t), p(t)), t \in [t_1, t_2]$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana  $H(q, p, t)$ , allora  $Q(t) = F(q(t), p(t), t)$  e  $P(t) = G(q(t), p(t), t)$  forniscono una soluzione delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana  $H'(Q, P, t)$ . In tal caso si dice che  $C$  è una **trasformazione canonica di  $V$  in  $W$  rispetto alle Hamiltoniane  $H$  e  $H'$** , che si dicono **canonicamente coniugate**.

Se, per di più, le funzioni  $F$  e  $G$  nella (5.3.1) sono indipendenti dal tempo e se, comunque si scelga l'Hamiltoniana regolare  $H(q, p)$  indipendente dal tempo,  $C$  è canonica rispetto ad  $H$  e  $H'(Q, P) = H(C^{-1}(Q, P))$ , allora  $C$  si dice completamente canonica.

Si noti che, nel caso di una trasformazione completamente canonica,  $H'(Q, P)$  si ottiene da  $H(q, p)$ , operando il cambiamento di variabili corrispondente nell'espressione di  $H$ , per cui, nelle applicazioni alla Meccanica,  $H'$  rappresenta ancora l'energia. Nel seguito le trasformazioni completamente canoniche verranno in generale chiamate, per brevità, trasformazioni canoniche.

Più avanti faremo vedere come è possibile costruire delle trasformazioni canoniche. Facciamo intanto vedere come sia possibile caratterizzarle in termini delle proprietà della matrice Jacobiana della trasformazione.

Poniamo, come nella (5.3.1),

$$\begin{aligned} Q &= F(q, p) \\ P &= G(q, p) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

e definiamo le 4 matrici  $l \times l$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\partial F_i}{\partial q_j} & , & & B_{ij} &= \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \\ C_{ij} &= \frac{\partial G_i}{\partial q_j} & , & & D_{ij} &= \frac{\partial G_i}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

La matrice  $(2l) \times (2l)$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (5.3.4)$$

è la matrice Jacobiana della trasformazione (5.3.2) e pertanto, in base alla definizione (5.3.1),  $\det \mathbf{L} \neq 0$ .

Definiamo inoltre la matrice  $(2l) \times (2l)$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

avendo indicato con  $I$  la matrice identità  $l \times l$ , ed indichiamo con  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\nabla H$ ,  $\nabla H'$  i vettori a  $2l$  componenti uguali, rispettivamente, a  $(q, p)$ ,  $(Q, P)$ ,

$(\partial H/\partial q, \partial H/\partial p), (\partial H'/\partial Q, \partial H'/\partial P)$ . Queste definizioni implicano, in particolare, che le equazioni di Hamilton possono scriversi nella forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}(\nabla H)(\mathbf{x}(t)) \quad (5.3.6)$$

Si noti inoltre che

$$\mathbf{E}^2 = -\mathbf{I} \quad (5.3.7)$$

dove  $\mathbf{I}$  indica la matrice identità  $(2l) \times (2l)$ .

**Proposizione 5.3.1** *Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia completamente canonica è che*

$$\mathbf{L}^{-1} = -\mathbf{E}\mathbf{L}^T\mathbf{E} \quad (5.3.8)$$

**Dim.** - In base alla definizione (5.3.1) le soluzioni delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana  $H(q, p)$  e  $H'(Q, P)$  sono collegate fra loro dalle relazioni

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = C(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} F(q(t), p(t)) \\ G(q(t), p(t)) \end{pmatrix} \quad (5.3.9)$$

ed inoltre

$$H(\mathbf{x}) = H'(C(\mathbf{x})) \quad (5.3.10)$$

Usando la (5.3.10) e le (5.3.3), si vede facilmente che

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} \quad , \quad (\nabla H)(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^T(\nabla H')(C(\mathbf{x})) \quad (5.3.11)$$

Ne segue, usando anche la (5.3.6), che

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{E}\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{E}\mathbf{L}^T\nabla H'(\mathbf{y}) \quad (5.3.12)$$

D'altra parte, la (5.3.6) usata per  $H'$  e la (5.3.7) implicano che  $\nabla H'(\mathbf{y}) = -\mathbf{E}\dot{\mathbf{y}}$ , per cui

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}[-\mathbf{E}\mathbf{L}^T\mathbf{E}]\dot{\mathbf{y}} \quad (5.3.13)$$

Di qui segue immediatamente la (5.3.8). ■

Una matrice di ordine pari che soddisfa la (5.3.8) si dice *matrice simplettica*. Dalla (5.3.8) si ricava immediatamente, calcolando il determinante di ambedue i membri ed usando il fatto che  $\det(\mathbf{E}) = \det(-\mathbf{E}) = (-1)^l$ , che

$$\det(\mathbf{L})^2 = 1 \quad (5.3.14)$$

Pertanto il determinante di ogni matrice simplettica è eguale a 1 in modulo. Ne segue che le trasformazioni canoniche conservano il volume, poiché  $\mathbf{L}$  è la matrice Jacobiana della trasformazione. Si può in realtà dimostrare che  $\det(\mathbf{L}) = +1$ .

## 5.4 Parentesi di Poisson

La caratterizzazione (5.3.8) delle trasformazioni canoniche viene talora rappresentata in una maniera diversa, che ora andiamo a descrivere.

**Definizione 5.4.1** *Date due funzioni regolari  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$ , si definisce parentesi di Poisson di  $f$  e  $g$  e si indica con il simbolo  $\{f, g\}(q, p)$  la funzione*

$$\{f, g\}(q, p) = \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial f}{\partial q_i}(q, p) \frac{\partial g}{\partial p_i}(q, p) - \frac{\partial f}{\partial p_i}(q, p) \frac{\partial g}{\partial q_i}(q, p) \right] \quad (5.4.1)$$

Si noti che, usando questa definizione, le equazioni di Hamilton possono scriversi nella forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad , \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (5.4.2)$$

e che

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad (5.4.3)$$

**Proposizione 5.4.1** *Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia completamente canonica è che, se la trasformazione è definita come in (5.3.2),*

$$\{F_i, G_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0 \quad (5.4.4)$$

**Dim.** - Usando la (5.3.4) e la (5.3.5), la (5.3.8) può scriversi nella forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \quad (5.4.5)$$

$$= \begin{pmatrix} (-BC^T + AD^T) & (BA^T - AB^T) \\ (-DC^T + CD^T) & (DA^T - CB^T) \end{pmatrix} \quad (5.4.6)$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine di questa eguaglianza, si trova

$$\begin{aligned} (-BC^T + AD^T)_{ij} &= \delta_{ij} \\ (BA^T - AB^T)_{ij} &= 0 \\ (-DC^T + CD^T)_{ij} &= 0 \\ (DA^T - CB^T)_{ij} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

La quarta equazione coincide con la prima, in quanto  $(DA^T - CB^T) = (-BC^T + AD^T)^T$ . Le altre tre, usando le (5.3.3), si possono scrivere nella forma (5.4.4). ▀

Le (5.4.4) vengono di solito scritte usando per  $F$  e  $G$  i nomi delle variabili  $Q$  e  $P$ :

$$\{Q_i, P_j\}(q, p) = \delta_{ij} \quad , \quad \{Q_i, Q_j\}(q, p) = \{P_i, P_j\}(q, p) = 0 \quad (5.4.7)$$

Questa espressione, insieme alle (5.4.3), giustifica l'affermazione che *le trasformazioni canoniche lasciano invarianti le parentesi di Poisson delle variabili  $q$  e  $p$* . In realtà le trasformazioni canoniche lasciano invarianti le parentesi di Poisson di qualunque coppia di funzioni, come mostra la proposizione seguente.

**Proposizione 5.4.2** *Date due funzioni regolari  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$ , siano  $\tilde{f}(Q, P) = f(C^{-1}(Q, P))$  e  $\tilde{g}(Q, P) = g(C^{-1}(Q, P))$  le loro rappresentazioni in termini delle variabili  $(Q, P) = C(q, p)$ . Allora*

$$\{f, g\}(q, p) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(C(q, p)) \quad (5.4.8)$$

**Dim.** - Per definizione  $f(q, p) = \tilde{f}(F(q, p), G(q, p))$  e  $g(q, p) = \tilde{g}(F(q, p), G(q, p))$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{k=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i} \frac{\partial F_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i} \frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right] \sum_{j=1}^l \left[ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j} \frac{\partial G_j}{\partial p_k} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^l \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i} \frac{\partial G_i}{\partial p_k} \right] \sum_{j=1}^l \left[ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j} \frac{\partial F_j}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j} \frac{\partial G_j}{\partial q_k} \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j} \{F_i, F_j\} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j} \{F_i, G_j\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j} \{G_i, F_j\} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j} \{G_i, G_j\} \right] \end{aligned}$$

La (5.4.8) segue immediatamente dalle (5.4.4). ▀

## 5.5 Funzioni generatrici

Nel par. 5.2 abbiamo visto che le soluzioni delle equazioni di Hamilton possono essere caratterizzate come punti di stazionarietà del funzionale (5.2.1) nell'insieme  $\mathcal{F}$  lì definito. Notiamo ora che questo funzionale può essere scritto nella forma

$$A(X) = \int_{\mathcal{C}} \left[ \sum_{i=1}^l p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] \quad (5.5.1)$$

dove  $\mathcal{C}$  rappresenta la curva  $\{(q(t), p(t), t), t \in [t_1, t_2]\}$  nell'insieme  $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$  su cui è definita l'Hamiltoniana e l'espressione in parentesi quadra è una forma differenziale su  $V$ .

Supponiamo ora che  $C$  sia un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$  di  $V$  in  $W$ . Dato  $X \in \mathcal{F}$ , indichiamo come prima con  $x(t) = (q(t), p(t))$  la funzione corrispondente e definiamo

$$\mathcal{F}' = \{x'(t) = (Q(t), P(t)) = C(x(t), t), t \in [t_1, t_2] : X \in \mathcal{F}\} \quad (5.5.2)$$

Se  $C$  è una trasformazione canonica rispetto alle Hamiltoniane  $H$  e  $H'$  (vedi def. (5.3.1)), il Principio di Hamilton implica che, se  $\bar{X}$  è un punto di stazionarietà di  $A(X)$ , la funzione  $\bar{x}'(t) = C(x(t), t)$  è un punto di stazionarietà del funzionale su  $\mathcal{F}'$

$$A'(X') = \int_{\mathcal{C}'} \left[ \sum_{i=1}^l P_i dQ_i - H'(Q, P, t) dt \right] \quad (5.5.3)$$

la definizione di  $\mathcal{C}'$  essendo analoga a quella di  $\mathcal{C}$ . Ovviamente l'affermazione precedente è vera anche se si scambiano i ruoli di  $H$  e  $H'$ .

Osserviamo che i due funzionali (5.5.1) e (5.5.3) possono essere visti ambedue in modo naturale, utilizzando il diffeomorfismo  $C$  fra  $V$  e  $W$ , come funzionali sia su  $\mathcal{F}$  che su  $\mathcal{F}'$ . Per esempio, se  $Q = F(q, p, t)$ ,  $dQ_i$  può essere interpretato come il differenziale  $dF_i(q, p, t)$  su  $V$  o come il differenziale  $dQ_i$  su  $W$ . Per sottolineare questo fatto, d'ora in poi useremo i simboli  $Q_i$  e  $P_i$  per indicare sia le variabili nell'insieme  $C(V)$  che le funzioni  $F_i$  e  $G_i$ ; analogamente i simboli  $q_i$  e  $p_i$  indicheranno anche le funzioni che permettono di rappresentarle in funzione di  $Q$  e  $P$ .

Siamo ora in grado di formulare una condizione sufficiente perché  $C$  sia canonica rispetto ad  $H$  e  $H'$ .

**Proposizione 5.5.1** *Condizione sufficiente perché la trasformazione  $C$  sia canonica rispetto alle Hamiltoniane  $H(q, p, t)$  e  $H'(Q, P, t)$  è che esista una funzione  $R(q, p, t)$ , tale che, su  $V$*

$$\left[ \sum_{i=1}^l p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] = \left[ \sum_{i=1}^l P_i dQ_i - H'(Q, P, t) dt \right] + dR(q, p, t) \quad (5.5.4)$$

*cioè tale che le due forme differenziali  $(pdq - Hdt)$  e  $(PdQ - H'dt)$  differiscano per un differenziale esatto.*

**Dim.** - La (5.5.4), insieme alle (5.5.1) e (5.5.3), implica che

$$A(X) = A'(C(X)) + R(x_2, t_2) - R(x_1, t_1) \quad , \quad \forall X \in \mathcal{F} \quad (5.5.5)$$

avendo indicato con  $C(X)$  l'elemento di  $\mathcal{F}'$  individuato dalla funzione  $C(x(t), t)$  e con  $x_i = x(t_i)$  i valori fissi negli estremi dell'intervallo  $[t_1, t_2]$  delle funzioni  $X \in \mathcal{F}$ . Infatti l'integrale lungo la curva  $\mathcal{C}$  di  $PdQ - H'dt$ , pensata come forma differenziale su  $V$ , coincide con l'integrale lungo la curva  $\mathcal{C}' = C(\mathcal{C})$ ,

se si pensa  $PdQ - H'dt$  come forma differenziale su  $W$ . Essendo  $C$  un diffeomorfismo, nella (5.5.5) i ruoli di  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  possono scambiarsi. Pertanto, essendo  $x_1$  e  $x_2$  eguali per tutti gli  $X \in \mathcal{F}$ ,  $X$  è un punto di stazionarietà di  $A$  se e solo se  $C(X)$  è un punto di stazionarietà di  $A'$ . Per il Principio di Hamilton, ciò significa che  $x(t)$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton per  $H$  se e solo se  $C(x(t), t)$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton per  $H'$ . Pertanto  $C$  è una trasformazione canonica rispetto ad  $H$  e  $H'$ . ■

La Prop. 5.5.1 permette di costruire facilmente, data comunque la funzione regolare  $H(q, p, t)$ , un gran numero di trasformazioni canoniche rispetto ad  $H$  ed ad una opportuna Hamiltoniana  $H'(Q, P, t)$ .

**Proposizione 5.5.2** *Sia  $H(q, p, t)$  una funzione regolare sull'aperto  $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$  e sia  $S(q, Q, t)$  una funzione regolare su  $\mathbb{R}^{2l+1}$ , tale che*

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j}(q, Q, t) \right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (q, Q, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (5.5.6)$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, Q, t) \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}(q, Q, t) \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo  $C$  fra  $V$  ed un aperto  $W$ , tale che  $C$  è una trasformazione canonica rispetto ad  $H(q, p, t)$  e la funzione regolare  $H'(Q, P, t)$  su  $W$ , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q(q, p, t), t) \quad (5.5.8)$$

**Dim.** - Per il Teorema del Dini, la (5.5.6) garantisce che la prima delle (5.5.7) può essere risolta rispetto alle variabili  $Q$ ; sia  $Q(q, p, t)$  la soluzione. Se si sostituisce questa funzione nel secondo membro della seconda delle (5.5.7), si ottiene una funzione  $P(q, p, t)$ , che definisce, insieme a  $Q(q, p, t)$ , una trasformazione regolare  $C$  di  $V$  in  $W = C(V)$ . Questa trasformazione è un diffeomorfismo, in quanto la (5.5.6) garantisce che anche la seconda delle (5.5.7) può essere risolta rispetto alle  $q$  in termini di una funzione  $q(Q, P, t)$ , che, inserita nel secondo membro della prima delle (5.5.7), permette di ottenere anche  $p$  in funzione di  $Q, P$  e  $t$ . Poniamo ora

$$R(q, p, t) = S(q, Q(q, p, t), t) \quad (5.5.9)$$

Le (5.5.7) implicano che

$$dR = \sum_{i=1}^l [p_i dq_i - P_i dQ_i] + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.5.10)$$

È pertanto facile verificare che la condizione (5.5.4) è verificata, se si definisce  $H'$  come nella (5.5.8). Ne segue che la trasformazione  $C$  è canonica rispetto ad  $H$  e  $H'$ . ■

**Proposizione 5.5.3** Sia  $H(q, p, t)$  una funzione regolare sull'aperto  $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$  e sia  $S(q, P, t)$  una funzione regolare su  $\mathbb{R}^{2l+1}$ , tale che

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_j}(q, P, t) \right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (q, P, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (5.5.11)$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, P, t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q, P, t) \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo  $C$  fra  $V$  ed un aperto  $W$ , tale che  $C$  è una trasformazione canonica rispetto ad  $H(q, p, t)$  e la funzione regolare  $H'(Q, P, t)$  su  $W$ , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(q, p, t), t) \quad (5.5.13)$$

**Dim.** - Si dimostra come prima che le (5.5.12) definiscono un diffeomorfismo, dopo di che si definisce

$$R(q, p, t) = S(q, P(q, p, t), t) - \sum_{i=1}^l Q_i P_i \quad (5.5.14)$$

Le (5.5.12) implicano che

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{i=1}^l [p_i dq_i + Q_i dP_i - d(Q_i P_i)] + \frac{\partial S}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^l [p_i dq_i - P_i dQ_i] + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

È pertanto facile verificare che la condizione (5.5.4) è verificata, se si definisce  $H'$  come nella (5.5.13). Ne segue che la trasformazione  $C$  è canonica rispetto ad  $H$  e  $H'$ . ■

In modo del tutto simile si dimostrano le proposizioni seguenti.

**Proposizione 5.5.4** Sia  $H(q, p, t)$  una funzione regolare sull'aperto  $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$  e sia  $S(p, Q, t)$  una funzione regolare su  $\mathbb{R}^{2l+1}$ , tale che

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial Q_j} (p, Q, t) \right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (p, Q, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (5.5.15)$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial S}{\partial p_i} (p, Q, t) \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i} (p, Q, t) \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo  $C$  fra  $V$  ed un aperto  $W$ , tale che  $C$  è una trasformazione canonica rispetto ad  $H(q, p, t)$  e la funzione regolare  $H'(Q, P, t)$  su  $W$ , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} (p, Q(q, p, t), t) \quad (5.5.17)$$

**Proposizione 5.5.5** Sia  $H(q, p, t)$  una funzione regolare sull'aperto  $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$  e sia  $S(p, P, t)$  una funzione regolare su  $\mathbb{R}^{2l+1}$ , tale che

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial P_j} (p, P, t) \right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (p, P, t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \quad (5.5.18)$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial S}{\partial p_i} (p, P, t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} (p, P, t) \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo  $C$  fra  $V$  ed un aperto  $W$ , tale che  $C$  è una trasformazione canonica rispetto ad  $H(q, p, t)$  e la funzione regolare  $H'(Q, P, t)$  su  $W$ , tale che

$$H'(C(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} (p, P(q, p, t), t) \quad (5.5.20)$$

Le quattro proposizioni precedenti mostrano che, data una funzione regolare  $S(u, v, t)$  su  $\mathbb{R}^{2l+1}$  ( $u, v \in \mathbb{R}^l$ ) tale che la matrice  $\{\partial^2 S / \partial u_i \partial v_j\}$  ha determinante non nullo, è possibile associarle quattro differenti trasformazioni canoniche, mettendo in corrispondenza  $u$  con le variabili  $q$  o  $p$  e  $v$  con le variabili  $Q$  o  $P$ . La funzione  $S$  viene detta *funzione generatrice della trasformazione canonica* corrispondente.

Se la funzione generatrice non dipende esplicitamente dal tempo, le trasformazioni canoniche ad essa associate sono tali che  $H(q, p, t) = H'(C(q, p), t)$ , sono quindi trasformazioni completamente canoniche. Ci si potrebbe a questo punto chiedere se tutte le trasformazioni completamente canoniche possono essere associate con una opportuna funzione generatrice. Che questo non sia vero segue dall'osservazione che tutti e quattro i tipi di trasformazioni canoniche associati con una funzione generatrice son tali che uno dei due gruppi di variabili  $q$  e  $p$  ed uno dei due gruppi di variabili  $Q$  e  $P$  possono essere espressi in funzione delle variabili rimanenti. Per esempio, nella trasformazione definita implicitamente dalle (5.5.7), le variabili  $p$  e  $P$  sono espresse in funzione delle  $q$  e  $Q$ . Questa proprietà non segue dalla definizione di trasformazione canonica, come mostra il seguente esempio.

Sia  $l = 2$  e si consideri la trasformazione seguente

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 & , & & P_1 &= p_1 \\ Q_2 &= p_2 & , & & P_2 &= -q_2 \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

È facile verificare che questa trasformazione è completamente canonica, applicando direttamente la definizione 5.3.1, ma non esiste alcun gruppo di quattro variabili, formato da  $(q_1, q_2)$  o  $(p_1, p_2)$  insieme a  $(Q_1, Q_2)$  o  $(P_1, P_2)$ , che si possa esprimere in funzione delle altre quattro. Si noti tuttavia che la condizione (5.5.4) è verificata con  $R(q, p) = p_2 q_2$ , come è facile verificare.

Si può dimostrare che ogni trasformazione canonica si può ottenere combinando una trasformazione del tipo della (5.5.21) (cioè una trasformazione che scambia  $p_i$  con  $(-q_i)$  per un sottoinsieme delle coppie  $(q_i, p_i)$ ) con una trasformazione canonica associata ad una funzione generatrice.

Un'altra questione interessante è se la condizione (5.5.4) è anche necessaria perché una trasformazione  $C$  sia canonica rispetto a  $H$  e  $H'$ ; la risposta è negativa, come mostra l'esempio seguente.

Data una Hamiltoniana  $H(q, p)$  ed un numero reale  $\lambda \neq 0$ , si consideri la trasformazione

$$Q = q \quad , \quad P = \lambda p \quad ,$$

e l'Hamiltoniana

$$H'(Q, P) = \lambda H(Q, P/\lambda) \quad .$$

È facile verificare che questa trasformazione è canonica, comunque si scelga  $H$ , rispetto a  $H$  e  $H'$ . Tuttavia, la forma differenziale

$$\sum_{i=1}^l \{ p_i dq_i - P_i dQ_i + [H'(Q, P) - H(q, p)] dt \} = \sum_{i=1}^l \{ (1-\lambda) p_i dq_i + (\lambda-1) H(q, p) dt \}$$

non è un differenziale esatto, se  $\lambda \neq 1$ . Infatti, se esistesse una funzione  $R(q, p, t)$ , tale che

$$\frac{\partial R}{\partial t} = (\lambda - 1)H \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = (1 - \lambda)p_i \quad ,$$

allora  $R$  dovrebbe essere della forma  $R = (\lambda - 1)tH(q, p) + F(q, p)$ , con  $H$  e  $F$  tali che, per ogni  $t$ ,

$$(\lambda - 1)t \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad (\lambda - 1)t \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = (1 - \lambda)p_i .$$

Ne segue subito che  $H$  deve essere costante e che  $F$  deve soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} = (1 - \lambda)p_i ,$$

incompatibili fra loro.

## 5.6 L'equazione di Hamilton-Jacobi.

Il metodo di costruzione di una trasformazione canonica tramite una funzione generatrice  $S(q, P, t)$  (usiamo qui la convenzione di indicare con  $(q, p) \in \mathbb{R}^{2l}$  le coordinate originali e con  $(Q, P)$  le nuove coordinate) può essere utilizzato per risolvere le equazioni di Hamilton nel modo seguente.

Ricordiamo che, nell'ipotesi che la funzione  $S(q, P, t)$  soddisfi in un aperto  $U$  la condizione che il determinante della matrice  $\partial^2 S / \partial q_i \partial P_j$  è diverso da zero, allora la trasformazione canonica è determinata dalle condizioni:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, P, t) \quad , \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q, P, t) \quad , \quad i = 1, \dots, l \quad , \quad (5.6.1)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) \quad , \quad (5.6.2)$$

dove possono essere considerate come variabili indipendenti o  $(q, p)$  o  $(q, P)$ . Ci poniamo ora il problema di determinare  $S(q, P, t)$  così che  $H' = 0$ . Se ciò fosse possibile, le equazioni del moto sarebbero banalmente risolte, in quanto le equazioni di Hamilton nelle variabili  $(Q, P)$  ci direbbero che  $P(t)$  e  $Q(t)$  sono delle costanti, calcolabili tramite le (5.6.1) (con  $t = t_0$ ) in funzione dei dati iniziali per le variabili  $(q, p)$ . Basta allora risolvere le (5.6.1) rispetto alle  $(q, p)$  (per un valore arbitrario di  $t$ ) per ottenere la soluzione cercata.

Le (5.6.1) e (5.6.2) implicano che  $H' = 0$ , se e solo se è verificata la seguente equazione alle derivate parziali, detta *equazione di Hamilton-Jacobi*:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad . \quad (5.6.3)$$

Si noti che nella (5.6.3) non compaiono le derivate parziali  $\partial S / \partial P_i$ , per cui le  $P_i$  hanno in realtà il ruolo di parametri. Il problema che ci si pone è pertanto quello di trovare una soluzione  $S(q, t)$  della (5.6.3), dipendente da  $l$  costanti arbitrarie  $P_i$ , tale che la matrice  $\partial^2 S / \partial q_i \partial P_j$  abbia determinante non nullo in un opportuno aperto delle variabili  $(q, P, t)$ . Una tale soluzione è di solito detta *integrale completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

I casi in cui si riesce a provare l'esistenza di un integrale completo non sono molti, anche se si tratta in genere di esempi di notevole interesse. Non si deve tuttavia pensare che ciò sia dovuto solo a difficoltà di calcolo. Infatti l'esistenza di un integrale completo, nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo, implica, come sarà chiaro dalla discussione successiva, che il sistema è *integrabile*, nel senso che i suoi moti possono essere descritti in termini di moti unidimensionali lineari. È tuttavia ben noto, fin dai tempi di Poincaré, che in genere i sistemi Hamiltoniani non soddisfano questa proprietà.

Un caso che capita sovente è quello in cui  $H$  non dipende da  $t$ ; in tal caso il problema può essere riformulato nel modo seguente. Si osserva che la funzione  $S(q, t)$  può suppersi della forma:

$$S(q, t) = S_0(q) + g(t) \quad , \quad (5.6.4)$$

con  $g'(t) = g_0$ , essendo  $g_0$  una costante. Infatti, sostituendo la (5.6.4) nella (5.6.3), si ha:

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q\right) = -g'(t) . \quad (5.6.5)$$

Poiché il termine di destra dipende solo da  $t$  e quello di sinistra solo da  $q$ , la (5.6.5) può essere verificata solo se ambedue i membri sono costanti.

Viene allora naturale assumere il valore di  $g_0$  come una delle variabili  $P_i$ , per esempio  $P_1$ , e porre

$$g(t) = -P_1 t . \quad (5.6.6)$$

Allora la (5.6.3) assume la forma:

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q\right) = P_1 , \quad (5.6.7)$$

ed il problema diventa quello di determinare una funzione  $S_0(q)$  che risolve la (5.6.7) e che dipende, oltre che da  $P_1$ , da altre  $l - 1$  costanti  $P_2, \dots, P_l$ , così che la matrice  $\partial^2 S_0 / \partial q_i \partial P_j$  ha determinante diverso da zero.

Si noti che la (5.6.7) potrebbe anche trovarsi come condizione per l'esistenza di una trasformazione canonica indipendente dal tempo tale che  $H'(Q, P) = P_1$ . Se si adotta questa interpretazione della (5.6.7),  $Q_1$  non è più una costante del moto, ma:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial H'}{\partial P_1} = 1 , \\ Q_1 &= \frac{\partial S_0}{\partial P_1} , \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

per cui  $Q_1$  è eguale a  $t$ , a meno di una costante additiva. Nel caso precedente, invece:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= 0 , \\ Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial S_0}{\partial P_1} - t , \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

il che è ovviamente del tutto equivalente.

Nel seguito noi adotteremo l'interpretazione (5.6.8) della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo. In tal caso, del resto, la (5.6.7) può essere vista come un caso particolare del *metodo di Hamilton-Jacobi*, consistente nel cercare una trasformazione canonica, tale che  $H'(Q, P)$  è esplicitamente funzione solo delle variabili  $P$ . La soluzione di questo più generale problema permette anch'essa di risolvere banalmente le equazione del moto; infatti le  $P_i$  sono ancora delle costanti del moto, mentre le  $Q_i$  soddisfano le equazioni:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \equiv \omega_i , \quad (5.6.10)$$

la cui soluzione, essendo le  $\omega_i$  costanti, è semplicemente

$$Q_i(t) = Q_i(0) + \omega_i t . \quad (5.6.11)$$

Per chiarire meglio la notazione, possiamo considerare un sistema ad un grado di libertà soggetto a forze attive conservative. La Lagrangiana sarà allora del tipo:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}g(q)\dot{q}^2 - \mathcal{V}(q) , \quad (5.6.12)$$

con  $g(q) > 0$ . L'Hamiltoniana corrispondente ha la forma:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2g(q)} + \mathcal{V}(q) . \quad (5.6.13)$$

La (5.6.7) diventa allora:

$$\frac{1}{2g(q)} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \mathcal{V}(q) = E , \quad (5.6.14)$$

avendo indicato  $P_1$  con  $E$ , per sottolinearne il significato fisico di energia. Inoltre indicheremo con  $\tau$  la variabile  $Q_1$ , che coincide con il tempo, come abbiamo visto, a meno di una costante. Pertanto, formalmente:

$$S_0(q, E) = \pm \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2g(q')[E - \mathcal{V}(q')]} + f(E) , \quad (5.6.15)$$

essendo  $f(E)$  una arbitraria funzione regolare di  $E$ .

Per dare un significato preciso alla (5.6.15) bisogna specificare l'aperto  $U$  dello spazio delle fasi (nelle variabili  $(q, p)$ ), in cui si vuole studiare il problema. In particolare, il segno davanti all'integrale deve coincidere con il segno di  $p$ ; ciò implica che  $U$  deve essere contenuto nel semipiano  $\{p > 0\}$  o  $\{p < 0\}$ . Inoltre  $q$  deve variare in un intervallo in cui  $E - \mathcal{V}(q) \geq 0$  e l'estremo inferiore di integrazione  $q_0$  deve appartenere a questo intervallo per ogni valore assunto da  $E$  in  $U$  ( $q_0$  potrebbe anche dipendere da  $E$ , purché in modo regolare).

Per chiarire meglio questo punto, supponiamo che il potenziale abbia un minimo in  $q = 0$ , che  $\mathcal{V}(0) = 0$  e che esista un intervallo  $(a, b)$ ,  $a < 0 < b$ , tale che  $\mathcal{V}(a) = \mathcal{V}(b) = E_0$ ,  $\mathcal{V}(q)$  è strettamente decrescente per  $q < 0$  e strettamente crescente per  $q > 0$ ; una situazione di questo genere si verifica, per esempio, per il potenziale di Fig. 1 del par. 1.1. Consideriamo nel *piano delle fasi*  $(q, p)$  gli insiemi aperti  $U = \{(q, p) : p^2/2g(q) + \mathcal{V}(q) \leq E_0\}$ ,  $U_+ = \{(q, p) \in U : p > 0\}$  e  $U_- = \{(q, p) \in U : p < 0\}$ . Se si sceglie nella (5.6.15) il segno  $+$  o il segno  $-$ , si definisce una trasformazione canonica fra  $U_{\pm}$  ed un aperto  $V_{\pm}$  del piano  $(\tau, E)$ , tale che  $V_{\pm} = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, c_{\pm}(E) < \tau < d_{\pm}(E)\}$ , essendo  $c_{\pm}(E)$  e  $d_{\pm}(E)$  funzioni regolari che dipendono dalla scelta in (5.6.15) di  $q_0$  e  $f(E)$  (eventualmente diversa nei due casi).

Questa arbitrarietà nella definizione della funzione generatrice può essere utilizzata per raccordare con continuità le due trasformazioni canoniche in modo da definire un'unica trasformazione canonica, definita nell'insieme  $U$  privato dell'intersezione con una qualunque semiretta uscente dall'origine delle coordinate. Per fissare le idee consideriamo l'insieme  $\tilde{U} = U \setminus \{(q, p) : p = 0, q < 0\}$  e definiamo in  $\tilde{U}$  la funzione

$$\tilde{S}_0(q, p) = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} p' dq' , \quad (5.6.16)$$

essendo  $\mathbb{C}_{q,p}$  il cammino, percorso in verso orario, che congiunge il punto  $P_0 = (q_{E-}, 0)$  con il punto  $P = (q, p)$  lungo la curva  $\mathbb{C}_E = \{(q', p') : p'^2/2g(q') + \mathcal{V}(q') = E\}$ , vedi Fig. 29.

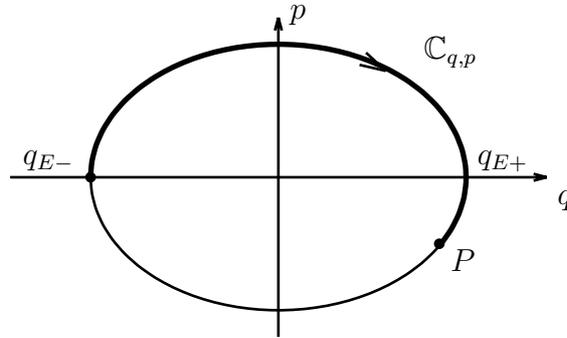


Figura 29: Curva di livello dell'energia.

Si noti che non è possibile estendere  $\tilde{S}_0$  a tutto l'insieme  $U \setminus \{(0, 0)\}$ , in quanto il suo limite per  $P \rightarrow P_0$  dal basso è eguale ad un numero positivo, l'area della regione interna a  $\mathbb{C}_E$ , mentre il suo limite dall'alto è eguale a 0.

Definiamo ora la funzione generatrice  $S_{0\pm}$  della trasformazione canonica in  $U_{\pm}$ , ponendola eguale alla restrizione di  $\tilde{S}_0$  ad  $U_{\pm}$ . È facile vedere che ciò corrisponde a scegliere nella (5.6.15)  $q_0 = q_{E-}$  e  $f(E) = 0$ , nel caso di  $S_{0+}$ ,  $q_0 = q_{E+}$  (vedi figura) e  $f(E) = \tilde{S}_0(q_{E+}, 0)$ , nel caso di  $S_{0-}$ . Si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial E} S_{0+}(q, E) = \int_{q_{E-}}^q dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} , \quad (5.6.17)$$

poiché il contributo alla derivata rispetto ad  $E$  dell'estremo d'integrazione è nullo, essendo nullo in quel punto l'integrando. Analogamente si trova che

$$\frac{\partial}{\partial E} S_{0-}(q, E) = \int_{q_{E-}}^{q_{E+}} dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} - \int_{q_{E+}}^q dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} . \quad (5.6.18)$$

Pertanto, si può definire un'unica trasformazione canonica su  $\tilde{U}$ , ponendo

$$\tau = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} g(q', p') dq' \quad , \quad g(q', p') = \text{sign}(p') \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}}, \quad (5.6.19)$$

avendo indicato con  $\text{sign}(p)$  il segno di  $p$ . Si noti che  $g(q, p)$  coincide, se  $\text{sign}(p) = \pm$ , con  $\partial^2 S_{0\pm} / \partial E \partial q$ , per cui, con abuso di notazione, talora si scrive

$$\tau = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} \frac{\partial^2 S_0}{\partial E \partial q}(q', E) dq'. \quad (5.6.20)$$

Le soluzioni delle equazioni di Hamilton in  $\tilde{U}$  si ottengono dalle (5.6.8); si trova:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{\mathbb{C}_{q(t), p(t)}} g(q', p') dq', \\ p(t) &= \pm \sqrt{2g(q)[E - \mathcal{V}(q(t)]}. \end{aligned} \quad (5.6.21)$$

$\tau(q, p)$  è pertanto il tempo necessario per percorrere il tratto di curva  $\mathbb{C}_{q,p}$  e la trasformazione canonica trasforma l'insieme  $\tilde{U}$  nell'insieme  $\tilde{V} = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, 0 < \tau < T(E)\}$ , essendo  $T(E)$  il periodo del moto di energia  $E$ .

## 5.7 Il metodo di separazione delle variabili

La possibilità di estendere le considerazioni precedenti a sistemi con più gradi di libertà dipende dalla possibilità di risolvere effettivamente la (5.6.7). In generale ciò succede quando si può applicare il metodo di *separazione delle variabili*.

Supponiamo che la dipendenza di  $H(q, p)$  da una coppia di variabili coniugate, per esempio  $(p_l, q_l)$ , sia del tipo:

$$H(q, p) = F(p', q', G(p_l, q_l)) \quad , \quad (p', q') = (p_1, \dots, p_{l-1}, q_1, \dots, q_{l-1}) \quad (5.7.1)$$

essendo  $F$  e  $G$  due opportune funzione di  $2l - 1$  e  $2$  variabili, rispettivamente. In tal caso ci si può limitare a cercare soluzioni della (5.6.7) della forma:

$$S(q) = S_l(q_l) + S'(q') \quad (5.7.2)$$

Infatti, se si sostituisce la (5.7.2) nella (5.6.7), si ottiene:

$$F\left(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', G\left(\frac{dS_l}{dq_l}, q_l\right)\right) = P_1 \quad (5.7.3)$$

che può essere risolta cercando una funzione  $S_l(q_l)$  tale che:

$$G\left(\frac{dS_l}{dq_l}, q_l\right) = P_1 \quad (5.7.4)$$

essendo  $P_l$  una costante, ed una funzione  $S'(q')$  tale che:

$$F\left(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', P_l\right) = P_1 \quad (5.7.5)$$

La (5.7.4) può in generale essere risolta banalmente (anche se in modo non unico, ma questo non è un problema) per un insieme non vuoto di valori di  $P_l$ , invertendo la funzione  $G(p_l, q_l)$  rispetto a  $p_l$ , in modo da ricavare  $dS_l/dq_l$  (e quindi  $S_l(q_l)$  tramite un'integrazione). D'altra parte la (5.7.5) è un'equazione dello stesso tipo di quella di partenza, ma con una variabile in meno. Si può quindi provare ad iterare il procedimento; se ci si riesce fino a ridursi ad un'equazione in una sola variabile (quindi banalmente risolvibile al pari della (5.7.4)), il procedimento di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi è portato a compimento con una soluzione della forma:

$$S(q, P) = \sum_{i=1}^l S_i(q_i, P) \quad (5.7.6)$$

dove  $P$  indica le  $l$  costanti arbitrarie che compaiono nel corso del procedimento (e che assumono il ruolo di nuovi impulsi).

Si noti, tuttavia, che il procedimento sopra descritto porta a determinare delle costanti del moto e a ridurre l'ordine del sistema di equazioni da risolvere, anche se non si riesce ad iterare fino alla fine. Supponiamo, per esempio, di essere riusciti a fare solo il primo passo; se consideriamo la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice

$$S(q, P) = S_l(q_l, P_l) + S'(q', P) \quad (5.7.7)$$

con  $S_l(q_l, P_l)$  che soddisfa la (5.7.4) e  $S'(q', P)$  arbitraria, la Hamiltoniana nelle nuove variabili avrà la forma:

$$H'(Q, P) = F\left(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', P_l\right) \quad (5.7.8)$$

dove le variabili  $q'$  si immaginano scritte in funzione di  $P$  e  $Q$ , usando le (5.6.1). Tuttavia, poichè  $S_l$  non dipende da  $P' = (P_1, \dots, P_{l-1})$ ,  $q'$  dipende solo da  $Q' = (Q_1, \dots, Q_{l-1})$ , come è facile verificare; ne segue che  $H'$  è indipendente da  $Q_l$ , che  $P_l$  è una costante del moto e che le equazioni di Hamilton nelle variabili  $P', Q'$  sono un sistema di equazioni chiuso, con  $P_l$  che funge da parametro. La funzione  $Q_l(t)$  è determinata in funzione della soluzione di questo sistema, usando l'equazione di Hamilton per la variabile  $Q_l$ , cioè:

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial H'}{\partial P_l}(P, Q') \quad (5.7.9)$$

## 5.8 Le variabili azione-angolo

Passiamo ora a discutere un'altra trasformazione canonica dalle proprietà particolarmente interessanti, che si può applicare, in particolare, quando è possibile trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi tramite il metodo di separazione delle variabili.

Supponiamo pertanto che sia possibile risolvere l'equazione (5.6.7) usando una funzione generatrice della forma (5.7.6). In tal caso l'analisi del §5.7 mostra che le funzioni  $S_i(q_i, P)$  sono soluzioni di equazioni del tipo:

$$G_i\left(\frac{dS_i}{dq_i}, q_i, P_{i+1}, \dots, P_l\right) = P_i \quad (5.8.1)$$

se si suppone di avere ordinato le variabili  $q$  in ordine inverso a quello con cui appaiono nel procedimento iterativo di separazione delle variabili (che ovviamente non è unico). Inoltre, per la (5.6.1):

$$p_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i}(q_i, P) \quad (5.8.2)$$

ed in generale la  $S_i(q_i, P)$  dovrà essere scelta in modo diverso in differenti regioni dello spazio delle fasi (vedi, per esempio, la (5.6.21)).

Supponiamo ancora che esista un aperto  $U$  nello spazio delle fasi, tale che il sottoinsieme del piano  $(p_i, q_i)$  in cui è verificata la condizione:

$$G_i(p_i, q_i, P_{i+1}, \dots, P_l) = P_i \quad (5.8.3)$$

sia, per ogni  $i$  e per ogni scelta di  $P$ , una curva chiusa  $\mathbb{C}_i$ . Supponiamo anche che questa curva si possa dividere in un numero finito di curve aperte  $\mathbb{C}_{i,k}$ ,  $k = 1, \dots, n_i$ , descrivibili nella forma  $p_i = h_{i,k}(q_i)$ ,  $q_i \in [a_{i,k}, a_{i,k+1}]$ , con  $a_{i,n_i+1} = a_{i,1}$ . Le funzioni  $h_{i,k}(q_i)$  devono ovviamente verificare le condizioni

$$\begin{aligned} h_{i,k}(a_{i,k+1}) &= h_{i,k+1}(a_{i,k+1}), \quad k = 1, \dots, n_i - 1, \\ h_{i,n_i}(a_{i,n_i+1}) &= h_{i,1}(a_{i,1}). \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Se  $(p(t), q(t))$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton, la coppia  $(p_i(t), q_i(t))$  deve soddisfare la (5.8.2) (con  $P$  eguale al valore calcolato con i dati iniziali), poiché la (5.8.2) è una delle relazioni che definiscono la trasformazione canonica. Pertanto  $(p_i(t), q_i(t))$ , cioè la proiezione del moto sul piano  $(p_i, q_i)$ , appartiene alla curva  $\mathbb{C}_i$  per ogni  $t$ ; noi supporremo che tale curva sia percorsa in un tempo finito, cioè che tale proiezione sia un moto periodico. Quest'ultima proprietà è di solito verificata se il moto si svolge in una regione limitata dello spazio delle fasi, come succede nell'esempio ad un grado di libertà del §5.6.

Si noti che le ipotesi precedenti implicano, in particolare, che i moti sono quasi-periodici nella regione  $U$  considerata.

Definiamo ora delle nuove variabili, dette *variabili di azione*, nel modo seguente

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbb{C}_i} p_i dq_i \quad (5.8.5)$$

avendo scelto il verso di percorrenza della curva chiusa  $\mathbb{C}_i$  in modo che, per esempio,  $J_i > 0$ .

Usando la (5.8.2) ed il fatto che le curve  $\mathbb{C}_i$  sono univocamente individuate da  $P$ , si mostra subito che  $J = (J_1, \dots, J_l)$  è una funzione solo delle  $P$ . Supponiamo che tale funzione sia invertibile nella regione  $U$  dello spazio delle fasi, in cui sono soddisfatte tutte le ipotesi precedenti, cioè che esista una funzione  $W(J)$  tale che, in  $U$ :

$$P = W(J) \quad (5.8.6)$$

Vogliamo studiare le proprietà della trasformazione canonica associata alla funzione generatrice:

$$\tilde{S}(q, J) = S(q, W(J)) \quad (5.8.7)$$

Notiamo innanzi tutto che, dette  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  le variabili coniugate alle variabili di azione, la Hamiltoniana, come funzione delle nuove variabili, ha la forma:

$$\tilde{H}(J, \alpha) = P_1 = W_1(J) \quad (5.8.8)$$

per cui è funzione solo delle  $J$ . Ne segue che le  $J$  sono costanti del moto e che:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J) \quad (5.8.9)$$

Pertanto il moto ha una descrizione molto semplice anche in termini delle variabili  $(J, \alpha)$ .

Notiamo ora che la trasformazione canonica è definita tramite la funzione generatrice in modo diverso nelle diverse regioni dello *spazio delle fasi* (lo spazio delle variabili  $(q, p)$ ) individuato dalla scelta, per ogni  $i$ , degli insiemi in cui la (5.8.3) è risolubile rispetto a  $p_i$ . Tuttavia, procedendo come nell'esempio ad un grado di libertà del par. 5.6, si possono raccordare con continuità queste trasformazioni canoniche. Si comincia scegliendo, su ogni curva  $\mathbb{C}_i$ , un punto  $P_{0i}$ , che dipende in modo regolare da  $J$ , ed un verso di percorrenza, lo stesso della (5.8.5), quindi si definisce, sulla regione  $U$  dello spazio delle fasi spazzata dalle curve  $\mathbb{C}_i$ , private dei punti  $P_{0i}$ , la funzione

$$\bar{S}(q, p) = \sum_{i=1}^l \int_{\mathbb{C}_{q_i, p_i}} p'_i dq'_i, \quad (5.8.10)$$

essendo  $\mathbb{C}_{q_i, p_i}$  il cammino che congiunge il punto  $P_{0i}$  con il punto  $P_i = (q_i, p_i)$  lungo la curva  $\mathbb{C}_i$ .

La restrizione di  $\bar{S}(q, p)$  ad ognuno dei diversi sottoinsiemi di  $U$  (che indicheremo con  $U_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) in cui tutte le  $p_i$  possono scriversi come funzioni di  $q_i$  e di  $J$ , è una possibile scelta della funzione generatrice. Se  $\tilde{S}^{(k)} = \sum_{j=1}^l \tilde{S}_j^{(k)}$  indica la funzione generatrice relativa alla regione  $U_k$ , in  $U_k$  si ha:

$$\alpha_i = \frac{\partial \tilde{S}^{(k)}}{\partial J_i}(q, J). \quad (5.8.11)$$

Pertanto le variabili  $\alpha_i$  possono scriversi in funzione di  $q$  e  $p$  in tutto l'insieme  $U$ , nella forma

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{C}_{q_j, p_j}} g_{ij}(p'_j, q'_j) dq'_j + f_i(J), \quad (5.8.12)$$

essendo  $g_{ij}(p_j, q_j)$  una funzione continua e regolare a tratti, eguale in  $U_k$  a  $\partial^2 \tilde{S}_j^{(k)} / \partial J_i \partial q_j$ , mentre  $f_i(J)$  indica il contributo della derivata rispetto a  $J_i$  degli estremi inferiori di integrazione. Come nel par. 5.6, con un piccolo ma utile abuso di notazione (peraltro frequente in letteratura), possiamo allora scrivere

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^l \int_{\mathbb{C}_{q_j, p_j}} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j} dq'_j + f_i(J). \quad (5.8.13)$$

Le variabili  $\alpha$  sono dette *variabili angolari*, per la ragione che andiamo subito a spiegare. Calcoliamo la variazione  $\Delta_j \alpha_i$  che subisce  $\alpha_i$ , quando si fa compiere un giro completo alla coppia  $(p_j, q_j)$  lungo la curva  $\mathbb{C}_j$ , tenendo fisse le altre variabili. Usando la (5.8.13), si trova che

$$\Delta_j \alpha_i = \oint_{\mathbb{C}_j} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j} dq_j. \quad (5.8.14)$$

D'altra parte, l'ipotesi fatta sulle curve  $\mathbb{C}_i$  prima della (5.8.4) implica che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathbb{C}_j} p_j dq_j &= \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial}{\partial J_i} \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} h_{j,k}(J, q_j) dq_j = \\ &= \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{\partial a_{j,k+1}}{\partial J_i} h_{j,k}(J, a_{j,k+1}) - \frac{\partial a_{j,k}}{\partial J_i} h_{j,k}(J, a_{j,k}) + \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} \frac{\partial h_{j,k}(J, q_j)}{\partial J_i} dq_j \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n_j} \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} \frac{\partial h_{j,k}(J, q_j)}{\partial J_i} dq_j = \oint_{\mathbb{C}_j} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j}(J, q_j) dq_j, \end{aligned} \quad (5.8.15)$$

avendo usato le (5.8.4) per eliminare i termini contenenti le derivate rispetto a  $J_i$  degli estremi di integrazione. Le (5.8.14) e (5.8.15) implicano che

$$\Delta_j \alpha_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathbb{C}_j} p_j dq_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 2\pi \delta_{ij}, \quad (5.8.16)$$

cioè la variabile  $\alpha_i$  si incrementa di  $2\pi$ , se si fa compiere un giro completo alla coppia  $(p_i, q_i)$  lungo  $\mathbb{C}_i$ , mentre ritorna al valore di partenza, se si fa

compiere un analogo giro alla coppia  $(p_j, q_j)$ , con  $j \neq i$ . Pertanto  $\alpha_i$  può essere vista come un parametro angolare lungo la curva  $\mathbb{C}_i$  e la (5.8.9) ci dice che, in termini delle variabili  $\alpha_i$ , tutti i moti che si svolgono in  $U$  appaiono come rotazioni uniformi di velocità angolare  $\omega_i(J)$ .

## 5.9 Esempio di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  che si muove nel piano  $xy$  sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale (detto potenziale di dipolo)

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

dove  $\vec{a}$  è un vettore fissato, che possiamo supporre abbia la stessa direzione e verso dell'asse  $x$ .

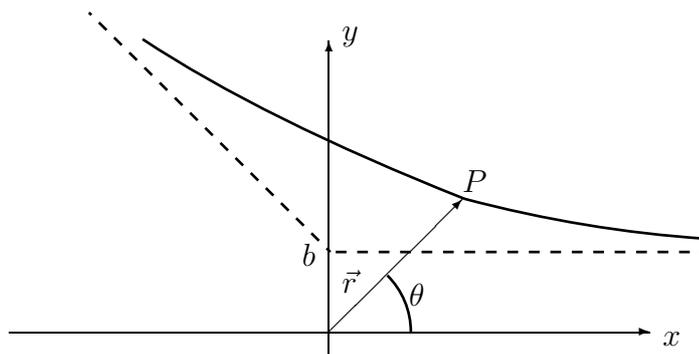


Figura 30: Esempio di traiettoria.

Vogliamo studiare il moto corrispondente alle condizioni (vedi Fig. 30):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= +\infty & , & & \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= b > 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) &= -v_0 & , & & \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{y}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

cioè il moto di una particella puntiforme che proviene dall'infinito in verso opposto ad  $\vec{a}$  con velocità  $v_0$ , seguendo una traiettoria parallela all'asse  $x$  (per  $t \rightarrow -\infty$ ), ma non coincidente con l'asse  $x$  (il caso  $b = 0$  è di fatto un problema unidimensionale, quindi banale).

Poiché

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = 3a\frac{xy}{r^5}, \quad (5.9.2)$$

$\dot{y}$  e quindi anche  $\dot{\theta}$  sono positivi in un intorno di  $t = -\infty$ , al contrario di  $\dot{r}$ , che è ovviamente negativo. Pertanto, dato che

$$p_r = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad (5.9.3)$$

esiste un tempo  $t_0$ , eventualmente infinito, tale che:

$$p_r < 0 \quad , \quad p_\theta > 0 \quad , \quad t \in (-\infty, t_0) \quad . \quad (5.9.4)$$

Nel seguito  $t_0$  sarà scelto come il più grande possibile, compatibilmente con la validità delle (5.9.4).

In coordinate polari l'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{a \cos \theta}{r^2} \quad , \quad (5.9.5)$$

cui corrisponde l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{2mr^2}[(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + 2ma \cos \theta] = E \quad , \quad (5.9.6)$$

la quale può essere risolta per separazione delle variabili, ponendo

$$S(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \quad . \quad (5.9.7)$$

$S_1(r)$  e  $S_2(\theta)$  devono soddisfare le equazioni:

$$p_r^2 = (\frac{\partial S_1}{\partial r})^2 = 2mE - \frac{\beta}{r^2} \quad , \quad (5.9.8)$$

$$p_\theta^2 = (\frac{\partial S_2}{\partial \theta})^2 = \beta - 2ma \cos \theta \quad . \quad (5.9.9)$$

$E$  e  $\beta$  sono due costanti del moto (corrispondenti ai due nuovi momenti coniugati), da determinare in base alle condizioni (5.9.1), che prendono qui il posto delle usuali condizioni iniziali. Poiché  $U(\vec{r}(t)) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow -\infty$ , si ha:

$$E = \frac{1}{2}m \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{v}(t)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad . \quad (5.9.10)$$

Inoltre, se si indica con  $\vec{k}$  il versore dell'asse  $z$  (ortogonale al piano del moto), si ha:

$$p_\theta = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{k} = m(xy\dot{z} - y\dot{x}) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} mbv_0 \quad , \quad (5.9.11)$$

in quanto  $x\dot{y} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ . Per dimostrare quest'ultima affermazione, notiamo che, grazie alle (5.9.1), esiste un tempo  $T$ , tale che, se  $t \leq T$ ,  $y(t) \leq 2b$  e  $-\dot{x}(t) \geq v_0/2$ . Pertanto, usando la (5.9.2), si ha

$$\begin{aligned} m\dot{y}(t) &= m \int_{-\infty}^t ds \ddot{y}(s) = 3a \int_{-\infty}^t \frac{x(s)y(s)}{r(s)^5} \leq 6ab \int_{-\infty}^t \frac{ds}{x(s)^4} = \\ &= 6ab \int_{-\infty}^t \frac{\dot{x}(s) ds}{x(s)^4} \frac{1}{\dot{x}(s)} \leq -\frac{12ab}{v_0} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{x}(s) ds}{x(s)^4} = \frac{12ab}{v_0} \int_{x(t)}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \\ &= \frac{4ab}{v_0} \frac{1}{x(t)^3} \Rightarrow x(t)\dot{y}(t) \leq \frac{4ab}{v_0} \frac{1}{x(t)^2} \rightarrow 0 \quad , \quad \text{for } t \rightarrow -\infty \quad . \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\beta = m^2 b^2 v_0^2 + 2ma = 2Emb^2 + 2ma > 0. \quad (5.9.12)$$

Inoltre

$$\beta - 2ma \cos \theta \geq \beta - 2ma = 2mEb^2 > 0,$$

per cui  $p_\theta$  non può annullarsi mai, così che le (5.9.4) possono essere violate solo se  $p_r$  cambia segno nel corso del moto ( $t_0$  è il primo istante in cui ciò avviene, se  $t_0 < +\infty$ ). D'altra parte

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{2a \cos \theta}{r^3} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} = \frac{\beta}{mr^3} > 0, \quad \forall t,$$

e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} p_r = -mv_0$ ; pertanto  $p_r(t)$  è una funzione crescente negativa, per  $t < t_0$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} p_r(t) = 0$ . Ragionando come nel par. 1.1 per i sistemi unidimensionali conservativi, si mostra anche che  $t_0$  è finito. Se  $t > t_0$ ,  $p_r(t)$  è una funzione crescente positiva e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_r = mv_0$ . Poiché  $p_r = m\dot{r}$ , la funzione  $r(t)$  è allora decrescente da  $+\infty$  a  $r_0$ , per  $t \leq t_0$ , e crescente da  $r_0$  a  $+\infty$ , per  $t \geq t_0$ , essendo  $r_0$  il valore di  $r$  per cui si annulla  $p_r$ , cioè

$$r_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2mE}}. \quad (5.9.13)$$

Si noti anche che  $r_0$  è certamente maggiore di  $b$ . Infatti la (5.9.12) può risciversi:

$$1 = \lambda + \mu, \quad \lambda = \frac{2ma}{\beta} > 0, \quad \mu = \frac{b^2}{r_0^2}, \quad (5.9.14)$$

da cui segue che  $\mu < 1$ .

La discussione precedente implica che, se si vuole studiare il moto per  $t \geq t_0$ , bisogna risolvere le (5.9.8) e (5.9.9) nella forma:

$$S_1(r) = \pm \int_{r_0}^r dr' \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r'^2}}, \quad (5.9.15)$$

$$S_2(\theta) = \int_0^\theta d\theta' \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta'}, \quad (5.9.16)$$

avendo scelto le costanti di integrazione arbitrarie così che  $S_2(0) = 0$  e  $S_1(r_0) = 0$ . In realtà gli estremi di integrazione potrebbero essere scelti in modo diverso nelle due regioni, ma la scelta adottata permette di raccordare con continuità le due diverse trasformazioni canoniche, quella definita per  $p_r > 0$  e quella definita per  $p_r < 0$ . Se indichiamo con  $\tau$  la variabile coniugata a  $E$ , si ha, nella regione  $p_r \geq 0$ ,

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} = \pm \int_{r_0}^r dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}}, \quad (5.9.17)$$

avendo usato il fatto che il termine proporzionale a  $\partial r_0 / \partial E$  dà un contributo nullo, in quanto l'integrando della (5.9.15) si annulla in  $r = r_0$ . Si noti che l'integrando nella (5.9.17) è singolare, ma integrabile, il che giustifica la scelta dell'estremo di integrazione inferiore nella (5.9.15); questa proprietà è strettamente legata al fatto che  $t_0 < +\infty$ , come discusso nel par. 1.1.

L'equazione di Hamilton per  $\tau$  implica che

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = t - t_0 \quad (5.9.18)$$

avendo imposto, in accordo con la (5.9.17) e la discussione precedente, la condizione  $\tau(t_0) = 0$ . Dalla (5.9.17) segue allora che

$$|t - t_0| = \int_{r_0}^{r(t)} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}}. \quad (5.9.19)$$

L'integrale a secondo membro della (5.9.19) si può calcolare esplicitamente e si trova (omettiamo i passaggi):

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + v_0^2(t - t_0)^2}. \quad (5.9.20)$$

Passiamo ora a studiare il comportamento della funzione  $\theta(t)$ . Poiché, come abbiamo detto,  $p_\theta$  non si annulla mai,  $\dot{\theta}(t)$  ha segno costante e pertanto  $\theta(t)$  è una funzione monotona. La relazione fra  $\theta$  e  $r$  lungo la traiettoria può essere determinata notando che, se  $\alpha$  è la variabile coniugata a  $\beta$ , allora

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{2r'^2 \sqrt{2mE - \beta/r'^2}} + \int_0^\theta \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta'}} \quad , \quad t \leq t_0, \quad (5.9.21)$$

$$\dot{\alpha} = 0. \quad (5.9.22)$$

Il valore costante di  $\alpha$  può essere determinato, calcolando il secondo membro della (5.9.21) nel limite  $t \rightarrow -\infty$ , in cui  $\theta(t) \rightarrow 0$  e  $r(t) \rightarrow +\infty$ ; si trova

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2 \sqrt{2mE - \beta/r'^2}}. \quad (5.9.23)$$

Ne segue che, posto  $\theta_0 = \theta(t_0)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta'}} &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2 \sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = \\ &= \int_0^{\sqrt{2mE/\beta}} \frac{dx}{2\sqrt{2mE - \beta x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}}. \end{aligned} \quad (5.9.24)$$

Analogamente, se si pone

$$\theta_M = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) ,$$

si ha:

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta'}} = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2 \sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} , \quad (5.9.25)$$

che può risciversi nella forma

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda \cos \theta'}} = \pi , \quad (5.9.26)$$

dove  $\lambda$  è una costante positiva e minore di 1, definita nella (5.9.14).

La (5.9.26) definisce implicitamente  $\theta_M$  in funzione di  $\lambda$ , ma non può essere risolta in termini di funzioni semplici. Facciamo vedere che, in ogni caso, è certamente vero che

$$\theta_M < \pi$$

Si consideri la funzione:

$$F(\lambda, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda \cos \theta'}} \quad (5.9.27)$$

Se  $\theta' < \pi/2$ , è facile mostrare che l'integrando è una funzione monotona crescente di  $\lambda$ ; ciò è sufficiente a provare che anche  $F$  è una funzione crescente di  $\lambda$ , se  $\theta \leq \pi/2$ . Se  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ , si può scrivere:

$$F(\lambda, \theta) = F(\lambda, \pi - \theta) + \frac{1}{2} \int_{\pi - \theta}^{\theta} d\theta' \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos \theta'}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \cos \theta'}} \right]$$

ed è ancora facile dimostrare che l'espressione fra parentesi quadre è una funzione crescente di  $\lambda$ ; lo stesso è allora vero per  $F$ . Pertanto:

$$F(\lambda, \theta) \geq F(0, \theta) = \theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \lambda \in (0, 1) \quad (5.9.28)$$

da cui segue subito, vista la monotonia di  $F$  anche come funzione di  $\theta$ , che  $\theta_M < \pi$ , dato che, per la (5.9.26),  $F(\lambda, \theta_M) = \pi$  e, per la (5.9.28),  $F(\lambda, \pi) > \pi$ .

Dalle considerazioni precedenti segue pure che:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \theta_M = 0$$