

Si consideri il moto descritto dall'equazione differenziale:

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -x^2 + a - \lambda \frac{dx}{dt}$$

1) Nel caso $\lambda = 0$, si consideri il dato iniziale

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

dire per quali valori di a il moto è periodico.

2) Sempre nel caso $\lambda = 0$, si consideri il dato iniziale:

$$x(0) = \frac{\sqrt{a}}{2}, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

Si stimi il periodo di oscillazione a meno del 50 per 100.

3) Nel caso $\lambda > 0$, si consideri il dato iniziale

$$x(0) = -\sqrt{a}, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 > 0$$

e si dimostri che per a sufficientemente grande il moto è limitato.

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici. A.A. 94/95.

Si consideri il moto descritto da:

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x^5} + \frac{6}{x^7} - \lambda \frac{dx}{dt}, \quad x > 0, \quad \lambda \geq 0$$

1. Nel caso $\lambda = 0$ sia $x(t)$ il moto che fa seguito al dato iniziale:

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} < a < \sqrt{3}$$

Sia

$$E = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}$$

Si dimostri che il moto $x(t)$ è oscillatorio di periodo $T = T(E)$ e si calcoli il

$$\lim_{E \rightarrow 0} T(E)$$

2. Sempre nel caso $\lambda = 0$ sia

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = b \quad \text{con} \quad a > \sqrt{3}.$$

Per ogni $a > \sqrt{3}$ si determini b in modo tale che $x(t)$ rimanga in un insieme limitato per ogni $t \geq 0$.

Per ogni $a > \sqrt{3}$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$ si calcoli il

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx(t)}{dt}$$

3. Per $\lambda = \frac{1}{2}$ sia

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \sqrt{\frac{31}{27}}$$

Si mostri che esiste $t_0 > 0$ tale che $\forall t \geq t_0$ si abbia: $x(t) > \sqrt{3}$

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici. A.A. 95/96.

Si consideri il moto descritto da:

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -\sin x + 2a \cos x - \lambda \frac{dx}{dt}, \quad a \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$$

1. Nel caso $\lambda = 0$ si determinino, al variare del parametro reale a i valori dell'energia totale meccanica E per cui il moto non è periodico.

2. Sempre nel caso $\lambda = 0$ per $a = 1/4$ si consideri il moto che fa seguito al dato iniziale:

$$x(0) = \pi/6, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

si stimi il periodo di oscillazione T a meno del 50 %.

3. Sempre nel caso $\lambda = 0$ per $a = 1/2$ si calcoli il

$$\lim_{E \rightarrow \frac{1}{2}^+} T(E) \quad \text{oppure} \quad \lim_{x_+ \rightarrow x_{\min}^-} T(x_+) \quad \text{dove}$$

4. Per $\lambda = 10$ sia

$$x(0) = \pi/2, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 2$$

Si calcoli il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$

x_+ è il massimo dell'intervallo di oscillazione e $x_{\min}$ è l'ascissa del p.to di minimo del potenziale. Le par cui si può avere la quiete in un p.to di eq. stabile.

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici. A.A. 96/97.

Si considerino, al variare di $x_0, \dot{x}_0$, i moti descritti da:

$$\ddot{x} = -x + x^3 - \lambda \dot{x}, \quad \lambda \geq 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

1. Nel caso $\lambda = 0$ determinare la totalità delle condizioni iniziali $x_0, \dot{x}_0$ tali che i corrispondenti moti siano limitati $\forall t \geq 0$

2. Sempre nel caso $\lambda = 0$ sia $\dot{x}_0 = 0$; determinare $a > 0$ in modo che se $x_0 \leq a$ il moto sia periodico di periodo $T: 2\pi \leq T \leq 4\pi$

3. Sempre nel caso $\lambda = 0$ consideriamo contemporaneamente i moti $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ che fanno seguito ai due dati iniziali differenti:

$$x_0^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}_0^{(1)} = 0, \quad x_0^{(2)} = 0, \quad \dot{x}_0^{(2)} = \frac{1}{2}$$

Determinare t in modo che $x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) \geq 0$

4. Per $\lambda = 10$ sia

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 2$$

Si calcoli il

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici. A.A. 97/98.

Si considerino, al variare di x_0, v_0 , i moti descritti da:

$$\ddot{x} + 3x^2 + 2\epsilon x - \epsilon^2 + \lambda \dot{x} = 0, \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad \lambda \geq 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

1. Nel caso $\lambda = 0$ studiare qualitativamente il moto per ogni ϵ . Dire per quali valori di x_0, v_0 il moto è periodico.
2. Sempre nel caso $\lambda = 0$ sia $\epsilon = 1, x_0 = 0 = v_0$; stimare il periodo di oscillazione a meno del 50 %
3. Per $\lambda = 20, \epsilon = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{6}, v_0 > 0$ tale che l'energia totale valga $E = 1$ dimostrare che il moto è limitato
4. (Facoltativo) Per $\lambda = 0$ dimostrare che $\forall \epsilon$ tutti i moti illimitati arrivano all'infinito in un tempo finito.

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici. A.A. 98/99.

Si considerino, al variare di x_0, v_0 , i moti $t \rightarrow x(t)$ descritti da:

$$\ddot{x} - a \sin x - 2 \sin 2x + \lambda \dot{x} = 0, \quad a, \lambda \geq 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

1. Nel caso $\lambda = 0, a = 2$ studiare qualitativamente il moto; in particolare dire per quali valori di x_0, v_0 il moto è tale che $\dot{x}(t) > 0 \forall t > 0$.

2. Sempre nel caso $\lambda = 0$ sia $a = 0, x_0 = \frac{\pi}{3}, v_0 = 0$; stimare il periodo di oscillazione a meno del 50 %

3. Per $\lambda = 20, a = 2, x_0 = \frac{2}{3}\pi, v_0 > 0$ tale che l'energia totale valga $E = 1 + V(\pi)$ calcolare il

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

4. (Facoltativo) Per $\lambda = 0, a = 4$ discutere il limite di piccoli moti attorno all'equilibrio stabile.

Si considerino, al variare di $x_0, \dot{x}_0, a \in \mathbb{R}$, i moti descritti da:

$$\ddot{x} + x^3 + ax = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

1. Discutere qualitativamente il moto per ogni $a \in \mathbb{R}$; in particolare determinare l'insieme dei valori di a per cui tutti i moti che non si riducono alla quiete sono periodici ed esprimere il periodo come integrale definito.
2. Sia $a = 1, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1$; stimare il periodo a meno del 50%
3. Sia $a = 0, x_0 = b > 0, \dot{x}_0 = 0$; dato $c > 0$ determinare b in modo che il corrispondente periodo di oscillazione sia maggiore di $2\pi c$.
4. (Facoltativo) Sia $a = -1, 0 < x_0 < 1, \dot{x}_0 = 0$; sia $\bar{x}$ il primo punto raggiungibile nel futuro di possibile arresto e sia $t_{x_0, \bar{x}}$ il tempo impiegato per raggiungerlo. Calcolare

$$\lim_{x_0 \rightarrow 1} t_{x_0, \bar{x}}$$

Prima prova di esonero di Meccanica Razionale per Matematici.
A.A. 01/02.

Si considerino, per x positivo, al variare di $a \in \mathbb{R}$, i moti descritti da:

$$\ddot{x} = +x^2 - a + \frac{1}{x^2}$$

1. Determinare le posizioni di equilibrio discutendone la stabilità al variare di a .

2. Rispondere motivatamente alle seguenti domande:

Per quali valori di a esistono moti limitati?

Per quali valori di a esistono moti periodici?

3. Sia $a = 4$, $x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\dot{x}(0) = 0$; mostrare che il moto è periodico e stimare superiormente il periodo.

4. (facoltativo) Sia $a = 0$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Dimostrare che esiste $T > 0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} x(t) = +\infty$$