Si consideri il moto descritto da

$$2\ddot{x} = \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x^5} + \frac{6}{x^7} - \lambda\dot{x}$$

con $x > 0$ e $\lambda \geq 0$.

1. Nel caso $\lambda = 0$ sia $x(t)$ il moto che fa seguito al dato iniziale:

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{con } \frac{\sqrt{3}}{2} < a < \sqrt{3}$$

Sia $E = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}$

Si dimostri che il moto $x(t)$ è oscillatorio di periodo $T = T(E)$ e si calcoli il

$$\lim_{E \to 0} T(E)$$

Per svolgere correttamente questo esercizio, dobbiamo studiare il grafico dell'energia potenziale e dobbiamo effettuare l'analisi qualitativa del moto.

$$U(x) = -\int dx \left(\frac{2}{x^3} - \frac{8}{x^5} + \frac{6}{x^7} \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

Ovviamente, vale la conservazione dell'energia

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = \mathcal{E}(x_0, v_0)}$$, dove $m = 2$ e

la funzione che calcola il livello di energia a partire dalle condizioni iniziali; altro non è che

$$\mathcal{E}(x_0, v_0) = v_0^2 + U(x_0) = v_0^2 + \frac{1}{x_0^2} - \frac{2}{x_0^4} + \frac{1}{x_0^6}.$$

Per effettuare il grafico del potenziale, è utile calcolare "gli zeri" del potenziale stesso, cioè

$$U(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6} = \frac{x^4-2x^2+1}{x^6} = \frac{(x^2-1)^2}{x^6} = 0$$

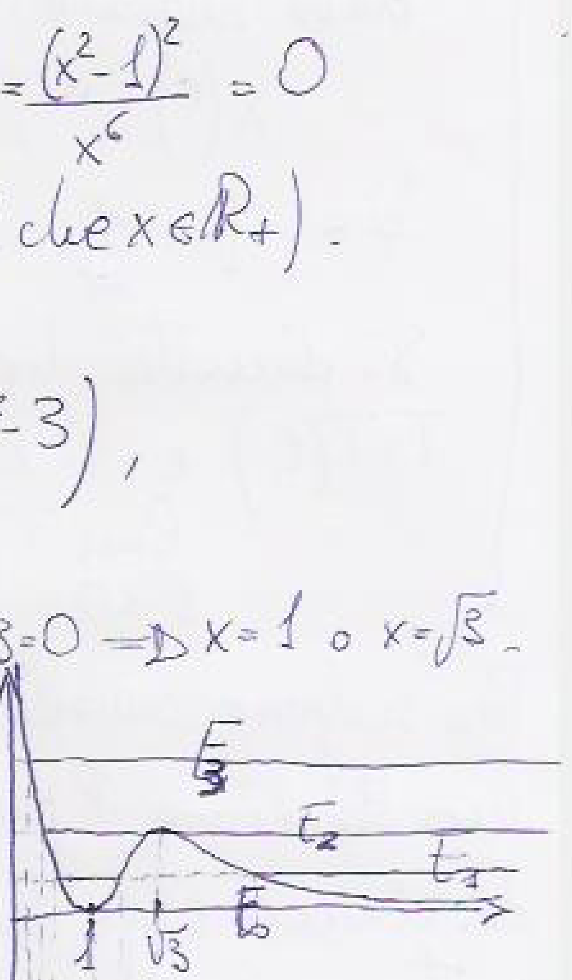
$$\Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1 \quad (\text{si ricordi che } x \in \mathbb{R}_+).$$

Tenendo conto del fatto che

$$U'(x) = -\frac{2}{x^7}\left(x^4 - 4x^2 + 3\right) = -\frac{2}{x^7}(x^2-1)(x^2-3),$$

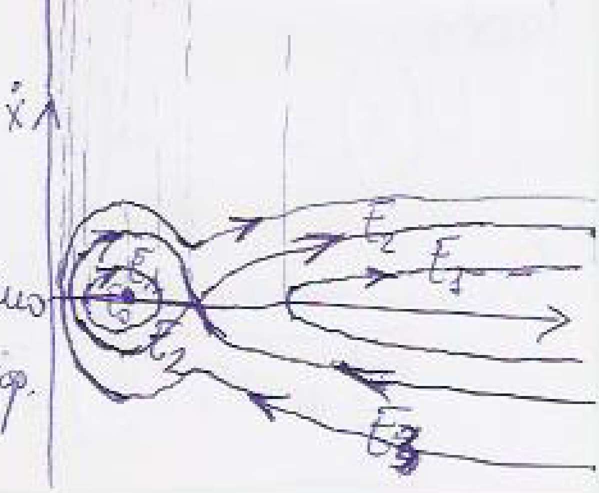
allora abbiamo che

da $U'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0$ oppure $x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ o $x = \sqrt{3}$.



Di conseguenza, $U(x)$ cresce solo per $x \in (1, \sqrt{3})$, mentre decresce per $x \in (0,1)$ e per $x \in (\sqrt{3}, \infty)$.

Osserviamo anche che $\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0^+$ e che $\lim_{x \to 0^+} U(x) = +\infty$.



• Se $\mathcal{E}(x_0, v_0) = E_0 = 0$, allora abbiamo un p.to di equilibrio stabile in corrisp. alla soluz. stazionaria $x(t) = 1$.

- Se $\mathcal{E}(x_0, v_0) = E_1$ con $E_1 \in \left(0, \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{27}\right) = \left(0, \frac{4}{27}\right)$, allora abbiamo un'orbita periodica e un'orbita illimitata.
- Se $\mathcal{E}(x_0, v_0) = E_2$ con $E_2 = \frac{4}{27}$, allora abbiamo un punto di equilibrio instabile in corrisp. alla soluz. stazionaria $x(t) = 1$, un'orbita limitata a meta asintotica e 2 orbite illimitate di cui una indef. progr., mentre l'altra è indef. ~~progr~~ retrograda e a meta asintotica.
- Se $E_3 = \mathcal{E}(x_0, v_0)$ con $E_3 > 4/27$, allora abbiamo un'orbita illimitata

Osserviamo che nel testo, la definizione di

$$E = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}$$

è stata scelta in modo t.c.

$$\mathcal{E}(a, 0) = E,$$

dove $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ sono proprio le cond. iniz. da studiare.

Facendo riferimento al grafico del potenziale e all'analisi qualitativa, è evidente che $\forall a \in [1, \sqrt{3})$ il moto che fa seguito alle cond. iniz. $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ è periodico. Infatti, se $a=1$, abbiamo un p.to di equil. stabile (che possiamo vedere come limite di orbite periodiche), mentre se $a \in (1, \sqrt{3})$ abbiamo una barriera di potenziale a destra (nel p.to iniziale) e una a sin. (si ricordi che in $(0,1)$ il potenziale decresce e $\lim_{x \to 0^+} U(x) = +\infty$), entrambe con tangente non orizzontale, quindi il moto è periodico.

Anche per $x(0) = a$ con $a \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ il moto è periodico purché

$$E < E_2 = 4/27, \text{ ma in questo caso } E < U\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$e \; U\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3} - \frac{32}{9} + \frac{64}{27} = \frac{36-96+64}{27} = \frac{4}{27},$$

quindi è assicurata la condizione che assicura la periodicità; questo termina la dimostrazione che

$x(t; x_0, v_0)$ è periodico quando $x_0 = a$, con $a \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ e $v_0 = 0$.

Applicando il teorema delle piccole oscillazioni, si ottiene che

$$\lim_{E \to 0^+} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(1)}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = \pi$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$U''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{40}{x^6} + \frac{42}{x^8}$$

2) Sempre nel caso $l=0$, sia

$$x(0)=a\ ,\ \dot{x}(0)=b \quad \text{con } a>\sqrt{3}$$

$\forall\, a>\sqrt{3}$ si determini b in modo t.c. $x(t)$ rimanga in un insieme limitato per ogni $t\geq 0$.
Per ogni $a>\sqrt{3}$ e per ogni $b\in\mathbb{R}$ si calcoli il

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) .$$

Facendo riferimento alla discussione dell'analisi qualitativa, siccome la condizione iniziale è posta alla destra del p.to di massimo relativo, allora abbiamo una sola possibilità affinché il moto percorra per tempi positivi un'orbita limitata, cioè deve essere

$$\mathcal{E}(a,b)=E_2=\frac{4}{27}\ ,\ \text{con } b\in\mathbb{R}_- .$$

Di conseguenza, risolviamo la seguente eq. nell'incognita b:

$$\mathcal{E}(a,b)=b^2+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^4}+\frac{1}{a^6}=\frac{4}{27}$$

$$\Longrightarrow b=-\sqrt{\frac{4}{27}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^4}+\frac{1}{a^6}\right)}\ ,$$

dove abbiamo preso solo la soluzione negativa (perché deve essere $b\in\mathbb{R}_-$) e il radicando è sicuramente positivo, perche $E=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^4}+\frac{1}{a^6}<\frac{4}{27}\ \forall\, a>\sqrt{3}$.

Per quanto riguarda il calcolo del

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt} x(t;a,b)$$

quando $a > \sqrt{3}$ e $b \in \mathbb{R}$, dalla discussione precedente, sappiamo che se $b = b^* := -\sqrt{\frac{4}{27} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}\right)}$, allora il moto è a meta asintotica, quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt} x(t;a,b^*) = 0^-.$$

In tutti gli altri casi di velocità iniziale $b \neq b^*$, allora dall'analisi qualitativa segue che $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, ma allora $\lim_{t\to+\infty} (\dot{x}(t))^2 = \mathcal{E}(a,b)^-$, perché l'energia potenziale U è t.c. $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0^+$.

Inoltre, sempre dall'analisi qualitativa, è evidente che per $t\to+\infty$, la velocità è positiva, quindi

$\forall\, a > \sqrt{3},\ b \in \mathbb{R}\setminus\{b^*\}$

abbiamo che $$\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt} x(t;a,b) = \sqrt{\mathcal{E}(a,b)}^- = \sqrt{b^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}\right)}$$

3) Per $\lambda = 1/2$ sia

$$x(0) = 1,\ \frac{dx}{dt}(0) = \sqrt{\frac{31}{27}}$$

Si mostri che esiste $t_0 > 0$ tale che $\forall\, t \geq t_0$ si abbia: $x(t) \geq \sqrt{3}$.

Osserviamo che per $x > \sqrt{3}$, non è possibile trovare delle barriere di potenziale, mentre si procede verso destra (perché $U'(x) < 0 \ \forall x > \sqrt{3}$).

Dimostrare quanto ci viene richiesto è quindi equivalente a mostrare che

$$\exists\, t^* > 0 \text{ tale che } x(t^*) = \sqrt{3} \text{ e } \dot{x}(t^*) > 0 .$$

Inoltre, possiamo riformulare la condizione $\dot{x}(t^*) > 0$ richiedendo che $\mathcal{E}\left(x(t^*), \dot{x}(t^*)\right) > U(\sqrt{3})$.

Dobbiamo quindi chiederci se l'energia dissipata nel tratto tra il p.to di partenza e il punto di massimo è sufficientemente grande da intrappolare il moto nella buca di potenziale. In verità, è proprio il contrario che dobbiamo mostrare: l'energia dissipata è troppo piccola affinché il moto rimanga confinato. Da un punto di vista quantitativo, il ragionamento precedente si traduce come segue:

dobbiamo verificare che $$\boxed{\lambda \int_0^{t^*} dt \left[\dot{x}\left(t; 1, \sqrt{\tfrac{31}{27}}\right)\right]^2 < \mathcal{E}\left(1, \sqrt{\tfrac{31}{27}}\right) - U(\sqrt{3})}$$

A questo scopo, osserviamo che

$$\lambda \int_0^{t^*} dt\, \dot{x}^2 = \lambda \int_1^{\sqrt{3}} dx\, \dot{x}(x) < \lambda \int_1^{\sqrt{3}} dx \max_{x \in [1, \sqrt{3}]} \sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E}\left(x, \dot{x}(x)\right) - U(x)\right)}$$

In altri termini, maggioriamo ~~la~~ l'energia dissipata ricorrendo alla massima velocità nel tratto per $x \in [1, \sqrt{3}]$. Tale massima velocità è espressa come massima differenza tra l'energia e l'energia potenziale, quindi

$$\lambda \int_0^{t^*} dt\, \dot{x}^2 < \lambda (\sqrt{3}-1)\, v_{max} = \lambda(\sqrt{3}-1)\sqrt{\mathcal{E}\left(1, \sqrt{\frac{31}{27}}\right) - U(1)} = \lambda(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{31}{27}}$$

qui usiamo il fatto
che l'energia è decrescente,
mentre il potenziale cresce in $(1, \sqrt{3})$.

Facendo il calcolo esplicito è facile verificare che

$$\lambda(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{31}{27}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{31}{27}} < \mathcal{E}\left(1, \sqrt{\frac{31}{27}}\right) - U(\sqrt{3}) = \frac{31}{27} - \frac{4}{27} = 1$$

Abbiamo quindi dimostrato che l'energia dissipata

$$\lambda \int_0^{t^*} dt\, \dot{x}(t) = \lambda \int_1^{\sqrt{3}} dx\, \dot{x}(x) < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{31}{27}} < \mathcal{E}\left(1, \sqrt{\frac{31}{27}}\right) - U(\sqrt{3})$$

da cui segue la tesi.