

Si studi il moto di un punto materiale P lungo una retta, quando è governato dall'equazione

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \lambda \dot{x}$$

I esonero 2014
pag. 1

dove $\lambda \geq 0$ e

$$U = U(x) = (x^2 - a^2)^2 \cdot (x^2 - (a+1)^2) \text{ con } a \in \mathbb{R}_+.$$

- 1) Nel caso conservativo, ovvero quando $\lambda = 0$, si caratterizzi l'insieme di tutte e sole le condizioni iniziali per cui esiste

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0);$$

inoltre si determini il valore/i valori di tale limite. (Ovviamente, $x(t; x_0, v_0)$ denota la legge di moto che fa seguito alle cond. iniz. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$).

Al fine di poter disegnare facilmente il grafico del potenziale, è utile trovare gli "zeri":

$$U(x) = 0 \iff x = \pm a \text{ e } x = \pm(a+1)$$

dove entrambe le soluzioni $x = \pm a$ sono "doppie", quindi ci aspettiamo che esse corrispondano a punti di minimo o di massimo.

Osserviamo anche che il potenziale è evidentemente
mente pari, cioè $U(-x) = U(x)$, e che

pag. 2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty.$$

Per tracciare il grafico, calcoliamo e studiamo la derivata:

$$\begin{aligned} U'(x) &= 2x(x^2 - a^2)(x^2 - (a+1)^2) + 2x(x^2 - a^2)^2 \\ &= 2x(x^2 - a^2) \cdot (2x^2 - 2a^2 - 2a - 1) \end{aligned}$$

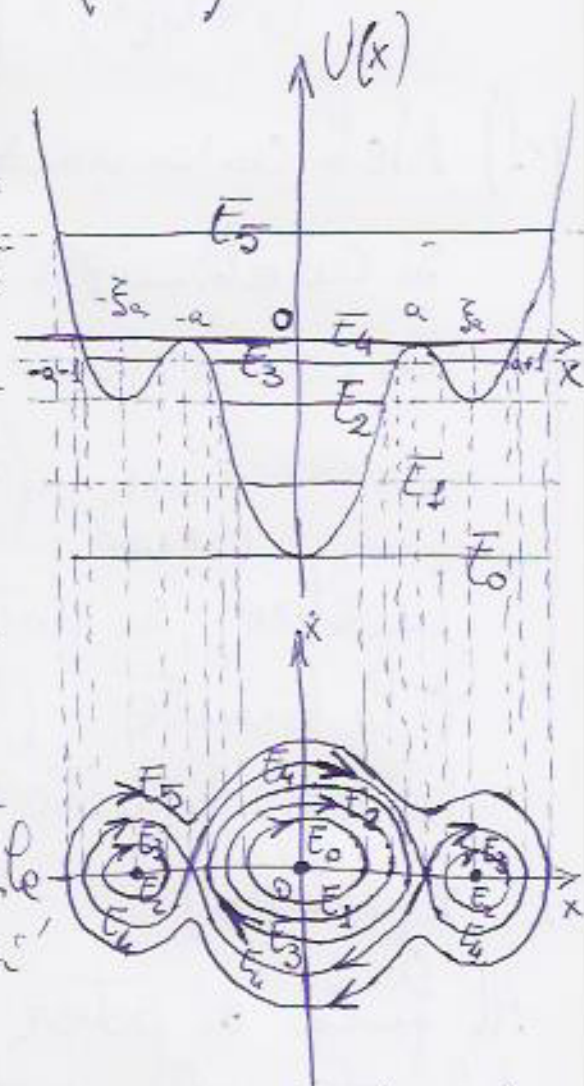
$$\Rightarrow U'(x) = 0 \text{ per } x=0, x=\pm a, x=\pm \xi_a$$

$$\text{dove } \xi_a := \pm \sqrt{a^2 + a + 1/2}, \text{ quindi}$$

$$\text{è evidente che } a < \xi_a < \sqrt{a^2 + 2a + 1} = a+1.$$

Essendo $U'(x)$ un pol. di quinto grado con
coeff. di x^5 che è positivo, allora
 U è crescente per $-\xi_a < x < -a$, $0 < x < a$
e $x > \xi_a$.

Qui accanto abbiamo riassunto le
informazioni nel grafico del potenziale
da cui segue la discussione dell'analisi
qualitativa.



- Se $E = E_0 = U(0) = -a^4(a+1)^2$, abbiamo un p.to di equilibrio stabile sulla sol. stazionaria $x(t) = 0$.
- Se $E = E_1$ con $-a^4(a+1)^2 < E_1 < U(\pm \xi_a) = -(a+1/2)^3$, abbiamo un'orbita periodica.
- Se $E = E_2 = -(a+1/2)^3$, abbiamo un'orbita periodica.

e due p.ti di equilibrio stabile in corrispondenza alle soluzioni stazionarie $x(t) = \pm \xi_a$.

pag. 3

• Se $E = E_3$ con $-(a + \frac{1}{2})^3 < E_3 < 0$, abbiamo 3 orbite periodiche

• Se $E = E_4 = 0$, abbiamo 2 p.ti di equilibrio instabili in corrispondenza alle soluz. stazionarie $x(t) = \pm a$; inoltre abbiamo 2 orbite limitate a meta asintotica (di cui una con x sempre positiva e una con x sempre negativa) e altre 2 orbite limitate a meta asintotica, di cui una indef. progressiva e una è indef. retrograda.

• Se $E = E_5 > 0$, abbiamo una orbita periodica.

Siamo ora in grado di rispondere alla prima domanda. Innanzitutto, dobbiamo escludere tutte le condizioni iniziali cui fanno seguito condizioni iniziali periodiche, poiché per queste ultime $\nexists$ il limite richiesto. Con riferimento alla discussione precedente, rimangono da considerare solo i livelli di energia E_0 , E_2 (solo i casi $x(t) = \pm \xi_a$) e E_4 .

Caso E_0 : Se $x_0 = 0, v_0 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.

Caso E_2 (escluse le orbite periodiche):

$$\text{Se } x_0 = -\xi_a \text{ e } v_0 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = -\xi_a$$

$$\text{Se } x_0 = \xi_a \text{ e } v_0 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = \xi_a$$

Caso E_4 ; cioè $\frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0) = E_4$:

Se $x_0 \leq -a$ oppure $\{x_0 \in (-a, a), v_0 < 0\}$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = -a$$

Se $x_0 \geq a$ oppure $\{x_0 \in (-a, a), v_0 > 0\}$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = a$$

- 2) Sempre nel caso conservativo, sia ora $a = 3$ e si studi il moto che fa seguito alle cond. iniz. $x(0) = x_0 = 1, \dot{x}(0) = v_0 = 0$. Si determinino due valori $T_- > 0$ e $T_+ < +\infty$, tali che $T_- < T < T_+$, dove T è il periodo del moto.

Con riferimento all'analisi qualitativa precedente, si comprende facilmente che siamo in corrispondenza al livello di energia E_1 . Infatti,

Infatti, $E = U(1) = (1-a^2)^2 \cdot (1-(a+1)^2) = 8^2 \cdot (1-16) = -960$
 che è compreso tra $E_0 = -a^4(a+1)^2 = -81 \cdot 16 = -1296$
 e $E_2 = -(a+\frac{1}{2})^3 = -(\frac{7}{2})^3 = -\frac{343}{8}$.

pag. 5

Siccome le condizioni iniziali corrispondono al caso E_1 , allora l'orbita è sicuramente periodica.

Inoltre, siccome la velocità iniziale è nulla, allora x_0 è in corrispondenza a una barriera di potenziale; inoltre, per la parità del potenziale, si ricava che gli estremi di oscillazione sono

$$x_{\pm} = \pm 1.$$

Per poter stimare il periodo, calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} U'' &= \frac{d}{dx} [2x(x^2-9) \cdot (2x^2-25)] = 2[(x^2-9)(2x^2-25) + \\ & 2x^2 \cdot (2x^2-25) + 4x^2(x^2-9)] = 2[2x^4 - 43x^2 + 225 + \\ & 4x^4 - 50x^2 + 4x^4 - 36x^2] = 2(10x^4 - 129x^2 + 225) \end{aligned}$$

Inoltre, per comprendere quali sono massimo e minimo di U'' in $[x_-, x_+]$, è conveniente calcolare

$$U''' = 2(40x^3 - 258x) = 4x(20x^2 - 129)$$

$$U'''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm \sqrt{\frac{129}{20}}, \text{ di conseguenza}$$

U'' cresce per $x \in (-\sqrt{\frac{129}{20}}, 0)$ e per $x > \sqrt{\frac{129}{20}}$.

Siccome ci interessa solo l'intervallo $[-1, 1]$, allora

U'' ~~de~~cresce nel semintervallo $[-1, 0)$ e ~~de~~cresce in $(0, 1]$.

Possiamo quindi utilizzare la classica stima del periodo come segue

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{\max_{x \in [-1, 1]} U''(x)}} \leq T \leq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\min_{x \in [-1, 1]} U''(x)}}$$

||

$$2\pi \sqrt{\frac{1}{U''(0)}}$$

||

$$2\pi \sqrt{\frac{1}{U''(1)}}$$

Tenendo conto che $U''(0) = 450$ e $U''(1) = 206$, allora possiamo effettuare la stima richiesta come segue

$$\frac{2\pi}{\sqrt{450}} =: T_- \leq T \leq T_+ := \frac{2\pi}{\sqrt{206}}$$

Questa stima ha un margine di incertezza inferiore al 50%; infatti,

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{450}} + \frac{1}{\sqrt{206}}}{\frac{1}{\sqrt{450}} + \frac{1}{\sqrt{206}}} \approx 0,19 < 20\%$$

3) Si studi ora il caso dissipativo con $\lambda = 1$.

pag. 7

Si determini

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0)$$

^{solo}
Nel caso in cui $x_0 = -(a+2)$ e $v_0 = 0$.

Per comodità, introduciamo la funzione che calcola l'energia (che ora non è più una costante del moto):

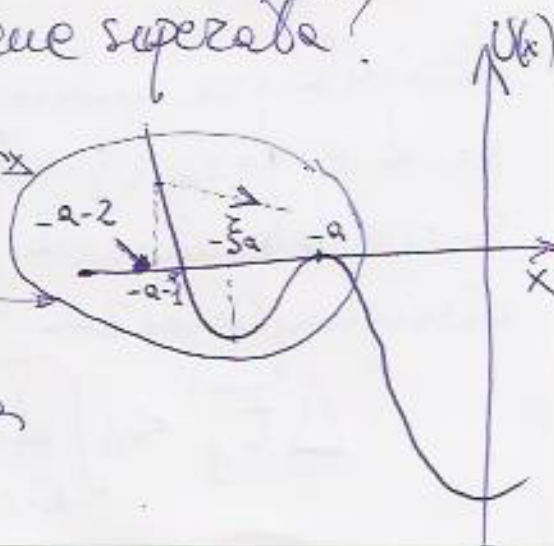
$$E(x, v) := \frac{1}{2} v^2 + U(x) = \frac{1}{2} v^2 + (x^2 - a^2)^2 \cdot (x^2 - (a+1)^2)$$

L'energia iniziale sarà, quindi,

$$\begin{aligned} E(x_0, v_0) &= E(-(a+2), 0) = (\cancel{a^2 + 4a + 4} - a^2)^2 \cdot (\cancel{a^2 + 4a + 4} - a^2 - 1) \\ &= 16(a+1)^2 \cdot (2a+3) \end{aligned}$$

^{prima}
La domanda da porsi è: l'energia che viene dissipata all'inizio del moto è abbastanza per cadere nella prima buca? Oppure, è sicuramente così poca che la prima buca di potenziale viene superata?

Con prima buca di potenziale, ^{intendiamo} ovviamente quella più a sinistra che ha minimo in $-\xi a$ (cioè questa parte del grafico che viene messa in evidenza).



Per poter rispondere alla questione che ci pag. 8
siamo posti, possiamo ragionare, euristicoamente,
come segue.

Ricordiamo che il differenziale dell'energia (che
per integrazione ci darà l'energia dissipata) è

$$dE = -\lambda v^2 dt = -\lambda |v| dx = -\lambda \sqrt{\frac{2}{m}(E(x,v) - U(x))} dx$$

Tenendo conto che l'energia iniziale $E(x_0, v_0) = O(a^3)$ e che
 $E(x,v) - U(x) < E(x_0, v_0) - U(-\xi_a) = O(a^3)$, non sembra possibile
che l'energia dissipata (sull'intervallo $[-a-2, -a]$, che è
di lunghezza $O(1)$!) possa essere maggiore o uguale della
differenza tra l'energia iniziale $E(x_0, v_0)$ e quella della
barriera di potenziale a destra, della ^{piccola} barriera di potenziale,
cioè $U(-a) = 0$.

Formalizziamo meglio il ragionamento euristico.

Sia $\Delta E_1 = E(-a+2, 0) - E(-a, v_a)$ l'energia
dissipata per andare dalle cond. iniziali $x_0 = -a+2$, $v_0 = 0$ fino a
 $x = -a$ e $v = v_a$ (quest'ultima velocità è incognita, ma non ci
serve determinarla), allora vale sicuramente la
disuguaglianza

$$\Delta E_1 < \lambda \int_{-a-2}^{-a} dx \sqrt{2(E(x_0, v_0) - U(-\xi_a))} = 2\sqrt{2} \lambda \sqrt{16(a+1)^2(a+3)\left(\frac{a+1}{2}\right)^3}$$

Ricordiamo che nella disuguaglianza precedente pag. 9 abbiamo utilizzato le seguenti due osservazioni:

$$E(x, v) \leq E(x_0, v_0) \quad (\text{l'energia decresce per effetto dell'attrito})$$

$$U(x) \geq U(-\xi_a) \quad \forall x \in [-(a+2), -a] \quad (-\xi_a \text{ è il minimo del potenziale in quell'intervallo}).$$

Proseguiamo ad elaborare la disuguaglianza precedente:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &< 2\sqrt{2} \lambda \sqrt{16(a+1)^2(2a+3) + (a+\frac{1}{2})^3} \\ &< 4\lambda \sqrt{16(a+1)^2(2a+3)} = 16\lambda \sqrt{(a+1)^2(2a+3)} \\ &= 16\sqrt{(a+1)^2(2a+3)} \quad (\text{dove abbiamo usato che } a \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \lambda=1) \end{aligned}$$

Siccome l'energia dissipata

$$\Delta \bar{E}_1 < 16\sqrt{(a+1)^2(2a+3)} < 16(a+1)^2(2a+3) = U(-(a+2)) - U(-a),$$

$\uparrow$
 $a+1 > 1$
 $2a+3 > 3$
 perché $a \in \mathbb{R}_+$

allora non è possibile che il moto "rimanga subito intrappolato" nella prima buca di potenziale.

Ci dobbiamo quindi chiedere se rimarrà intrappolato nella buca di potenziale al centro del grafico.

La situazione ora è radicalmente diversa pag. 10
rispetto a prima, per due ragioni:

1. la buca centrale di potenziale è di larghezza proporzionale ad a (mentre prima era $O(1)$);

2. la buca centrale è "profonda" - $a^4(a+1)^2 = O(a^6)$,
quindi (mentre prima la profondità era $U(-\xi_a) = O(a^3)$),
ciò implica che la velocità che entra nel termine di
dissipazione $1/|v \cdot dx|$ può essere $O(a^3)$. Essendo
l'ampiezza della buca $O(a)$ si comprende che
l'energia dissipata sarà circa $O(a^3) \cdot O(a) = O(a^4)$,
quindi di un ordine di grandezza superiore
rispetto a quella da dissipare (cioè $E(a, v_a) \sim U(a)$)
che è al più $O(a^3)$, affinché il moto rimanga intrappolato
nella buca centrale.

Anche in questo caso dobbiamo formalizzare meglio
il nostro ragionamento.

Una legge di moto, procedendo verso destra, supera la buca
di potenziale centrale se e solo se l'energia dissipata nel
tratto centrale

$$E(-a, v_{-a}) - E(a, v_a) \leq E(-a, v_{-a}) - U(a) \\ = E(-a, v_{-a})$$

Dimostriamo che ciò non è possibile per "grandi" a . [pag. 11]
 Se, per assurdo, ciò avvenisse allora l'energia dissipata
 sarebbe sicuramente maggiore di

$$\Delta \bar{E}_2 = \lambda \int_{-a}^a dx \sqrt{\frac{2}{m} (U(a) - U(x))} = \lambda \int_{-a}^a dx \sqrt{2(-U(x))}$$

$$> \lambda \int_{-a/2}^{a/2} dx \sqrt{2(-U(\pm a/2))} \quad \left(\text{dove abbiamo utilizzato} \right. \\ \left. \text{il fatto che } U \text{ decresce tra } -a \text{ e } 0 \text{ e cresce in } (0, a) \right).$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{E}_2 > a \lambda \sqrt{2 \left(\frac{3}{4} a^2 \right)^2 \left(\frac{3}{4} a^2 - 2a - 1 \right)}$$

$$> a \lambda \sqrt{2 \left(\frac{3}{4} a^2 \right)^3} > \frac{\lambda a^4}{8} \sqrt{54} > \frac{7}{8} \lambda a^4$$

L'energia dissipata da un eventuale moto che fosse in grado di superare la buca di potenziale, sarebbe sicuramente superiore a

$$\Delta \bar{E}_2 > \frac{7}{8} \lambda a^4$$

che per a grande abbastanza è sicuramente superiore al "gap" di potenziale $E(x_0, v_0) - U(a) = U(-a/2)$.
 Siamo quindi giunti a un assurdo: per grandi a il moto non può raggiungere $x=a$, perché l'energia dissipata è troppo grande.

Per grandi valori di a , quindi, la legge di moto $x(t; x_0, v_0)$ supera sicuramente la prima buca di potenziale, ma rimane sicuramente intrappolata dalla buca centrale (che è simmetrica rispetto all'asse delle y). I teoremi di Lyapunov consentono di stabilire che, allora, per a abbastanza grande

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, v_0) = 0$$

4) Si riconsideri il caso conservativo (cioè $\lambda = 0$) con $a = 1$ e si verifichi che il moto che fa seguito alle cond. iniz. $\{x(0) = x_0 = 3, \dot{x}(0) = v_0 = 0\}$ è periodico (di periodo T).
Si determinino 2 valori $T_- > 0$ e $T_+ < +\infty$, tali che $T_- < T < T_+$

Valutiamo l'energia E grazie alle cond. iniz., abbiamo che

$$E = U(3) = (3^2 - 1)^2 (3^2 - 2^2) = 64 \cdot 5 = 320$$

Siccome il livello di energia è positivo, allora siamo in un caso E_5 con riferimento all'analisi qualitativa

L'orbita è quindi sicuramente periodica, ma il problema è evidenziato dal profilo del potenziale sottostante al livello di energia:

tra $-3 = -(a+2)$ e $3 = (a+2)$ il potenziale ha un p.to di minimo e 2 p.ti di max, dove quindi U'' è sicuramente negativa e allora non possiamo utilizzare la stessa strategia del punto 2.

In verità, potremmo utilizzarla comunque per effettuare la stima "dal di sotto", che può essere realizzata ancora più facilmente come segue:

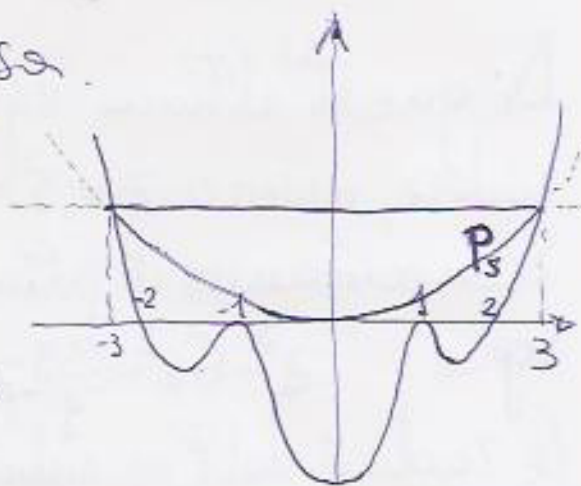
$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{|V(x)|} \geq 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{V_{\max}} = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\min})}}$$

quindi $T_- < T$ con $T_- = 2 \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{2(320 - U(0))}} = \frac{12}{\sqrt{2(320 + 3^4 \cdot 2^3)}}$

$$\Rightarrow T_- = \frac{12}{\sqrt{2(320 + 324)}} = \frac{12}{\sqrt{1288}} \approx \frac{1}{3}$$

La stima dal di sopra è più laboriosa.

Guardando al disegno del ^{potenziale} profilo (riportato qui a fianco), sembra ci sia speranza di dimostrare che la parabola $P_5(x)$ t.c. ha minimo nell'origine e vale $P_5(\pm 3) = E = 320$



pag. 14] sia effettivamente una parabola superiore
nell'intervallo ~~per~~ di oscillazione, cioè
tale per cui $U(x) \leq P_5(x) \leq E \quad \forall x \in [-3, 3]$

Tale parabola è della forma $P_5(x) = \alpha x^2$ e α è deter-
minato dalla condizione $P_5(\pm 3) = E = 320$

$$\rightarrow P_5(x) = \frac{320}{9} x^2$$

Al fine di dimostrare che $U(x) \leq P_5(x)$, cerchiamo
le radici dell'eq. $U(x) = P_5(x)$ se non ve ne saranno
all'interno di $(-3, 3)$, siccome $U(x) < 0 = P_5(0)$, avremo
verificato la disuguaglianza che ci serve.
Studiamo allora

$$U(x) = P_5(x) \Rightarrow (x^2 - 1)^2 \cdot (x^2 - 4) = \frac{320}{9} x^2$$

Introduciamo $z = x^2$, quindi l'eq. diventa

$$(z - 1)^2 \cdot (z - 4) - \frac{320}{9} z = (z^2 - 2z + 1)(z - 4) - \frac{320}{9} z$$

$$= z^3 - 6z^2 + 9z - 4 - \frac{320}{9} z = \boxed{z^3 - 6z^2 - \frac{239}{9}z - 4 = 0}$$

Di quest'ultima equazione cubica, noi conosciamo una
radice, ovvero $z = 9$

Scomponiamo il polinomio cubico $z^3 - 6z^2 - \frac{239}{9}z - 4$ come

$$\text{segue: } z^3 - 6z^2 - \frac{239}{9}z - 4 = \boxed{(z - 9)(z^2 + 3z + \frac{4}{9}) = 0}$$

le radici dell'eq. cubica sono allora date da $z = 9$ e

dalle soluzioni dell'equazione

$$z^2 + 3z + 4/9 = 0 \rightarrow z_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16/9}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{65/9}}{2}$$

Pag. 15

Siccome le ulteriori 2 radici dell'equazione in z sono negative, allora $\nexists$ altre soluzioni reali in $x = \pm\sqrt{z}$ dell'equazione $U(x) = P_S(x)$ all'esterno di quelle corrispondenti alle barriere di potenziale $x = \pm 3$.

Ne segue che $U(x) \leq P_S(x) \quad \forall x \in [-3, 3]$.

Utilizziamo la disuguaglianza precedente nella stima di periodo:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \leq 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - P_S(x))}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P_S''}}$$

Concludendo, abbiamo

$$T \leq T_+ \quad \text{dove} \quad T_+ := \frac{2\pi}{\sqrt{2 \cdot \frac{320}{9}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{9}{640}} \approx \frac{3}{4}$$

Per valutare il margine di incertezza delle nostre stime calcoliamo il rapporto tra semi-ampiezza dell'intervallo (delle stime stesse) sul valor medio, cioè

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \approx \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{9-4}{9+4} = \frac{5}{13} \approx 40\%$$

Ovviamente è una stima meno accurata di quella al punto 2, ma comunque $< 5\%$.