I prova di esonero di Fisica Matematica I
Corso di laurea in Matematica
17 Aprile 2014

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,x} - \lambda\dot{x} \ ,$$

dove $\lambda \geq 0$ è il coefficiente di attrito e l'energia potenziale $U(x)$ è definita da:

$$U(x) = (x^2 - a^2)^2 \cdot \big(x^2 - (a+1)^2\big)$$

per un fissato valore del parametro $a \in \mathbf{R}^+$.

(1) Si studi il caso conservativo ($\lambda = 0$). Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:

$$\big(x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0\big)\ ,$$

cui fanno seguito delle leggi del moto tali per cui esiste il

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, v_0)\ .$$

Inoltre, si determinino tutti i possibili valori assunti da tale limite, quando esso è ben definito.

(2) Limitatamente al caso con $\lambda = 0$ e $a = 1$, si verifichi che il moto con condizione iniziale

$$\big(x(0) = 3\,,\ \dot{x}(0) = 0\big)$$

è periodico. Inoltre, si dia una stima del periodo T del moto, determinando *esplicitamente*

(2a) un numero reale positivo T_- tale che $T \geq T_-$;

(2b) un numero reale $T_+ \geq T$ tale che l'errore relativo della stima sia inferiore al 50%.

(3) Si ponga $\lambda = 1$ e si consideri il moto con condizione iniziale

$$\big(x(0) = -(a+2)\,,\ \dot{x}(0) = 0\big);$$

si determini

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{t\to\infty} x\big(t; -(a+2), 0\big)\ .$$