

Coordinate cartesiane di alcuni punti notevoli:

$$A: (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0) \quad B: (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 0)$$

$$P: (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, -R \cos \theta) \quad Q: (\xi \cos \varphi, \xi \sin \varphi, 0)$$

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + \frac{1}{2} m \underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q,$$

dove $I_D = \frac{1}{2} \pi R^2$ è l'inerzia del disco, mentre

$\underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$, perché P è sulla sfera di raggio R e θ, φ sono rispettivamente colatitudine (o azimuthale verticale discendente) e longitudine, mentre $\underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q = \dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2$ perché (ξ, φ) sono le coord. polari di Q nel piano orizzontale.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4} \pi R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2).$$

Energia potenziale:

$$U = m g z_P + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2 - q \mathcal{E} x_A,$$

dove $z_P = -R \cos \theta$, $x_A = R \cos \varphi$ e

$$\overline{PQ}^2 = (R \sin \theta - \xi)^2 + R^2 \cos^2 \theta = R^2 - 2 R \xi \sin \theta + \xi^2.$$

$$\Rightarrow U = -m g R \cos \theta - q \mathcal{E} R \cos \varphi + \frac{1}{2} k \xi^2 - k R \xi \sin \theta$$

(dove sono state omesse le costanti).

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana come segue:

$$L(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{4} \Pi R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 \dot{\varphi}^2) \\ + m g R \cos \vartheta + q E R \cos \varphi - \frac{1}{2} k \xi^2 + k R \xi \sin \vartheta,$$

da cui ricaviamo le equazioni di Lagrange in modo sostanzialmente automatico

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = m \ddot{\xi} - m \dot{\zeta} \dot{\varphi}^2 + k \xi - k R \sin \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m R^2 \ddot{\vartheta} - m R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + m g R \sin \vartheta - k R \xi \cos \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left[\left(\frac{\Pi}{2} + m \sin^2 \vartheta \right) R^2 + m \xi^2 \right] \ddot{\varphi} + 2 m R \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + 2 m \xi \dot{\zeta} \dot{\varphi} + q E R \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

— o —

(2) Punti di equilibrio e studio della loro stabilità.
Al fine di determinare i p.t. di equilibrio, dobbiamo risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = k(\xi - R \sin \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = m g R \sin \vartheta - k R \xi \cos \vartheta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = q E R \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = R \sin \vartheta \\ k R^2 \sin \vartheta \left(\frac{m g}{k R} - \cos \vartheta \right) = 0 \\ \varphi = 0, \pi \end{cases}$$

La seconda equazione ammette le seguenti soluzioni:

$$\sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi, \quad \cos \vartheta = \frac{m g}{k R} \Rightarrow \vartheta = \pm \beta, \\ \text{dove } \beta = \arccos\left(\frac{m g}{k R}\right) \text{ che } \exists \text{ se e solo se } \frac{m g}{k R} \leq 1.$$

Riassumendo, le configurazioni di equilibrio sono

$$(\xi, \vartheta, \varphi) \in \{(0, 0, 0), (0, \pi, 0), (R \sin \beta, \beta, 0), (-R \sin \beta, -\beta, 0), \\ (0, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (R \sin \beta, \beta, \pi), (-R \sin \beta, -\beta, \pi)\}$$

Allo scopo di studiare la stabilità, calcoliamo

$$\text{Hess } U(\xi, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} k & -kR \cos \vartheta & 0 \\ -kR \cos \vartheta & m g R \cos \vartheta + k R \xi \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & q E R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

La dipendenza dell'Hessiano dalle coordinate
 è così semplice, che possiamo immediatamente
 decidere la stabilità di 4 degli 8 p.ti di equilibrio.

Infatti, nei casi $(0, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (\pm R \sin \beta, \pm \beta, \pi)$

si ha che

$$\text{Hess } U(\xi, \vartheta, \varphi = \pi) = \begin{pmatrix} --- & --- & 0 \\ --- & --- & 0 \\ 0 & 0 & -q E R \end{pmatrix},$$

quindi (si ricordi che $q > 0$) $\exists$ sempre almeno un
 autovalore negativo $\Rightarrow$ in questi 4 casi i p.ti di equilibrio sono INSTAB.

- Caso $(\xi, \vartheta, \varphi) = (0, 0, 0)$

$$\text{Hess } U(\xi, \vartheta, \varphi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \vartheta, \varphi=0}} = \begin{pmatrix} k & -kR & 0 \\ -kR & mgR & 0 \\ 0 & 0 & qER \end{pmatrix}.$$

Siccome il termine in basso a destra (cioè qER) è evidentemente un autovalore positivo, allora possiamo restringerci a studiare $\begin{pmatrix} k & -kR \\ -kR & mgR \end{pmatrix}$, la cui traccia $k + mgR$ è evidente-
mente positiva, mentre il suo determinante è

$$kR(mg - kR) > 0 \text{ per } \frac{mg}{kR} > 1,$$

mentre è negativo se $\frac{mg}{kR} < 1$. Di conseguenza, nel
sottocaso $\frac{mg}{kR} > 1$, abbiamo 3 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILE,

nel sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$, c'è 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ INSTABILE,

mentre quando $\frac{mg}{kR} = 1$, abbiamo 2 autoval. pos. e 1 mult.,
quindi servirà un supplemento di indagine.

$$\text{Caso } (\xi, \vartheta, \varphi) = (0, \pi, 0)$$

$$\text{Hess } U(\xi, \vartheta, \varphi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \vartheta=\pi \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} k & kR & 0 \\ kR & -m g R & 0 \\ 0 & 0 & q g R \end{pmatrix}, \text{ il cui}$$

determinante è $-kR(mg + kR)qgR < 0 \Rightarrow 1 \text{ autoval.}$

è neg. (e gli altri 2 sono positivi) $\Rightarrow$ è un p.to di equil. INSTABILE

$$\text{Casi } (\xi, \vartheta, \varphi) = (\pm R \sin \beta, \pm \beta, 0)$$

$$\text{Hess } U(\xi, \vartheta, \varphi) \Big|_{\substack{\xi = \pm R \sin \beta \\ \vartheta = \pm \beta \\ \varphi = 0}} = \begin{pmatrix} k & -kR \cos \beta & 0 \\ -kR \cos \beta & m g R \cos \beta + kR^2(1 - \cos^2 \beta) & 0 \\ 0 & 0 & q g R \end{pmatrix},$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} q g R \cdot \left[k^2 R^2 \left(\frac{m g}{k R} \cos \beta + 1 - 2 \cos^2 \beta \right) \right] &= q g k^2 R^3 \left(\frac{m g^2}{k^2 R^2} + 1 - \frac{2 m g^2}{k^2 R^2} \right) \\ &= q g k^2 R^3 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{k^2 R^2} \right) > 0 \quad \text{se} \quad \frac{m g}{k R} < 1. \end{aligned}$$

Sempre perché l'ultimo elemento in basso a destra corrisponde a un autoval. pos. possiamo limitarci a studiare la matrice 2×2 in alto a sin., la cui traccia è $k + m g R \cos \beta + k R^2 \sin^2 \beta = k + \frac{m^2 g^2}{k} + k R^2 \sin^2 \beta > 0$.

Sottocaso con $\frac{mg}{kR} < 1$, abbiamo 3 autoval. pos.

$\Rightarrow$ p.ti di equil. STABILI.

Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$, abbiamo 2 autoval. pos. e 1 nullo,

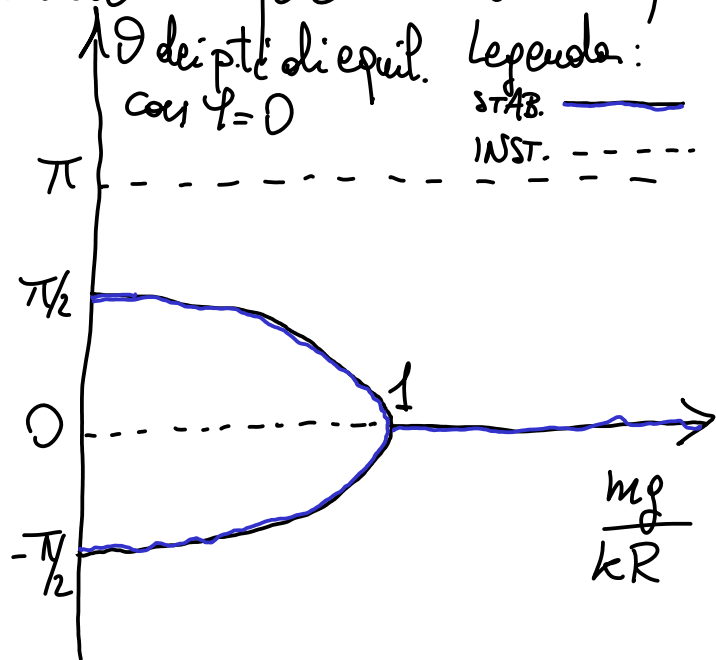
quindi servirà un supplemento di indagine.

Il sottocaso con $\frac{mg}{kR} > 1$ non è da considerare, perché sotto questa ipotesi non esistono questi p.ti di equil.

È conveniente riassumere la situazione dei p.ti di equilibrio (limitatamente a quelli con $\varphi = 0$) con un linguaggio grafico.

Nel grafico qui a destra si riconosce (in corrispondenza al valore critico $\frac{mg}{kR} = 1$) la classica situazione della biforcazione a forchetta di

un p.to di equilibrio stabile, questo porta a congetturare che i 3 casi indecisi, cioè $(0, 0, 0)$ e $(\pm R \sin \beta, \pm \beta, 0)$ che per $\beta = \arccos \frac{mg}{kR} = \arccos 1$ sono coinc.



denti, corrispondano a un equilibrio stabile.
Allo scopo di verificarlo, consideriamo la funzione

$$f(\xi, \vartheta) = U(\xi, \vartheta, 0) = -mgR \cos \vartheta + \frac{1}{2} k \xi^2 - kR \xi \sin \vartheta - qR,$$

nel caso $\frac{mg}{kR} = 1$, quindi

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \text{ è t.c. - } f(\xi, \vartheta) = \frac{1}{2} k \xi^2 - kR \xi \sin \vartheta - kR \cos \vartheta - qR$$

Siccome $\frac{\partial f}{\partial \xi} = k(\xi - R \sin \vartheta)$, allora sappiamo per
certo che $\frac{\partial f}{\partial \xi}(2R, \vartheta) > 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \xi}(-2R, \vartheta) < 0 \forall \vartheta \in [-\pi, \pi)$.

Ne segue che il p.to di minimo assoluto di f
sull'insieme (compatto) $S = \{(\xi, \vartheta) : \xi \in [-2R, 2R], \vartheta \in \mathbb{T}\}$
non può appartenere a $\partial S = \{(\xi, \vartheta) : |\xi| = 2R, \vartheta \in [-\pi, \pi)\}$,

quindi sarà nella parte interna $S \setminus \partial S$ e quindi
sarà in corrispondenza a un p.to stazionario, cioè
t.c. $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$. Non rimanevano altre
possibilità se non $(\xi, \vartheta) = (0, 0), (0, \pi)$. Quest'ultima
soluzione di quiete corrisponde a un p.to di sella, quindi
 $(\xi, \vartheta, \varphi) = (0, 0, 0)$ è p.to di minimo assoluto perché è l'unico candidato
dato ad esso. Per il teorema di Lagrange-Dirichlet

$(0,0,0)$ è quindi p.to di equil. STABILE nel caso "critico"
 con $\frac{mg}{kR} = 1$.

(3) Supponiamo ora che gli effetti del campo elettrico siano trascurabili, cioè si ponga $E=0$. Si consideri il sistema quando viene introdotto un ulteriore vincolo in modo t.c. - O & P formi sempre un triangolo rettangolo con vertice in Q (cioè Q è la proiezione di P sulla guida).

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le eq. di Hamilton del nuovo sistema e se ne determinino le costanti del moto.

In termini delle coordinate libere $(\xi, \vartheta, \varphi)$ adottate finora, il nuovo vincolo si esprime nel modo seguente:

$$\xi = R \sin \vartheta,$$

quindi la nuova lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = L(\xi = R \sin \vartheta, \vartheta, \varphi, \dot{\xi} = R \dot{\vartheta} \cos \vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}), \text{ cioè}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \\ &\quad + M g R \cos \vartheta - \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \vartheta + k R^2 \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{1}{2} m R^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \dot{\vartheta}^2 + \left(\frac{1}{4} M + m \sin^2 \vartheta \right) R^2 \dot{\varphi}^2 + M g R \cos \vartheta + \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

Possiamo ora scrivere la hamiltoniana del nostro sistema meccanico:

$$H(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\theta} = \dot{\theta}(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) \end{array} \right.$$

$$\text{dove } \begin{cases} p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2(1+\cos^2\theta)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = p_\theta / [mR^2(1+\cos^2\theta)] \\ p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2} \end{cases}$$

$$\text{quindi } H(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mR^2(1+\cos^2\theta)} + \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{\left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2}$$

e, inoltre,

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = \frac{-2p_\theta^2 \sin\theta \cos\theta}{[mR^2(1+\cos^2\theta)]^2} - \frac{I p_\theta R \cos\theta - \frac{1}{2} k R^2 \sin^2\theta}{\left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2} \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial \theta}\right) \\ \dot{p}_\varphi = 0 \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right) \\ \dot{\theta} = p_\theta / [mR^2(1+\cos^2\theta)] \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\right) \\ \dot{\varphi} = p_\varphi / \left[\left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2\right] \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\right) \end{cases}$$

Dalla seconda eq. di Hamilton segue immediatamente che $p_\varphi = \left(\frac{I}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2\dot{\varphi}$ è una costante del moto;

un facile calcolo (che qui omettiamo, per brevità) mostrerebbe che P_y altro non è che la proiezione del momento angolare totale proiettato sull'asse z , coerentemente con il fatto che il sistema (quando è stato posto $\mathcal{E} = 0$) è diventato invariante per rotazioni attorno all'asse z .

Inoltre, siccome la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, allora anche

$$H = \frac{1}{2} \frac{P_\theta^2}{mR^2(1+\cos^2\theta)} + \frac{1}{2} \frac{P_\varphi^2}{\left(\frac{M}{2} + 2m\sin^2\theta\right)R^2} - Mgr\cos\theta - \frac{1}{2} kR^2 \sin^2\theta$$

è una
costante
del moto.

Infatti, essa corrisponde all'energia totale meccanica del sistema.

(3B) Si considerino moti del sistema, tali che il punto P e il punto Q descrivano ^{due} orbite circolari, ciascuna delle quali giace in un piano orizzontale (questi due piani paralleli sono diversi tra loro). Studiando le equazioni del moto, si determini quale condizione deve essere soddisfatta dal periodo di questi moti circolari affinché essi esistano.

Inoltre si spieghi perché tali moti circolari sono possibili solo se il punto P si trova sempre al di sotto del piano Oxy .

Affinché il moto di P sia in un piano orizzontale, allora deve essere che la sua quota verticale sia costante, cioè $\frac{d}{dt}(-R \cos \vartheta) = 0 \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0$, quindi

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) \quad \forall t.$$

Ne segue che

$$p_{\vartheta} = m R^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \dot{\vartheta} = 0$$

e quindi

$$0 = \dot{p}_{\vartheta} = \frac{2 p_{\varphi}^2 m R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\left[\left(\frac{M}{2} + 2m \sin^2 \vartheta \right) R^2 \right]^2} - M g R \sin \vartheta + k R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

(che è la prima eq. di Hamilton).

Dall'ultima delle eq. di Hamilton abbiamo

$$p_{\varphi} = \left(\frac{M}{2} + 2m \sin^2 \vartheta \right) R^2 \dot{\varphi},$$

quindi le informazioni precedenti possono essere riassunte nella seguente eq.

$$[\quad] \quad (2 m \dot{\varphi}^2 + k) R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = M g R \sin \vartheta.$$

Siccome per i moti circolari che stiamo considerando $\vartheta(t) = \vartheta(0)$ è costante, possiamo esprimere facilmente il valore

(a sua volta costante) di $\dot{\varphi}$, cioè

$$|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{MgR - kR^2 \cos \vartheta}{2mR^2 \cos \vartheta}}$$

che vale (ovviamente) per $\vartheta \neq \pm \pi/2$; nel caso $\vartheta = \pm \pi/2$ l'eq. [] non ammette soluzioni.

Inoltre, nel caso $\vartheta = 0, \pi$ la circonferenza (descritta dall'orbita di P) si riduce a un punto, quindi è chiaramente non significativo il problema di determinare quale condizione deve soddisfare il periodo.

Dopo aver ricordato le coordinate di P: $(R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, -R \cos \vartheta)$, quando ϑ e φ sono costanti, allora il moto è circolare uniforme e il suo periodo altro non è che

$$T_P = \frac{2\pi}{|\dot{\varphi}|} = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^2 \cos \vartheta}{mgR - kR^2 \cos \vartheta}}$$

Infine, sempre dall'equazione [] con $\vartheta \neq 0, \pi$ (cioè i casi in cui l'orbita degenera in un punto)

$$(2m\dot{\varphi}^2 + k)R^2 \cos \vartheta = MgR$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{Mg}{(2m\dot{\varphi}^2 + k)R} > 0$$

Ne segue che deve essere $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$, quindi P non può avere quota $z_P = -R \cos \vartheta > 0$.