

Preappello di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
Prova scritta per l'ammissione all'orale
6 Giugno 2022

Un sistema meccanico è costituito da un disco e due punti materiali P e Q , i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z *verticale* ascendente. I punti materiali P e Q sono entrambi di massa m . Il disco è perfettamente rigido e di densità di massa omogenea al suo interno, è di massa M e raggio R ; esso è vincolato in modo che il suo baricentro sia costantemente sovrapposto all'origine O ed è libero di ruotare nel piano orizzontale Oxy . Su uno dei diametri del disco, di estremi A e B , è poggiata una guida rettilinea, che quindi ruota solidalmente al disco; essa è da considerarsi di lunghezza infinita e massa trascurabile. Il punto P può muoversi su di un'immaginaria circonferenza *verticale* che ha il segmento AB come diametro orizzontale. Il punto Q è libero di scorrere sulla guida. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega P a Q . Il punto A è dotato di una carica elettrica q , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse x .

È da intendersi che tutti gli altri parametri del problema, ovvero m , g , M , R , k , q e $\mathcal{E}$, abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che P può attraversare il punto Q e/o il disco e/o la guida senza scontrarsi con loro. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si introduca un nuovo vincolo ideale, realizzato in modo tale che il punto Q stia sempre in coincidenza alla proiezione di P sul piano Oxy (cioè la molla che li congiunge da ora in poi stia sempre in verticale). Si consideri ora il caso in cui gli effetti del campo elettrico siano trascurabili (cioè si ponga $\mathcal{E} = 0$).
- (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton^[*] che de-

[*] Qualora proprio non riesca la discussione degli esercizi *in ambito Hamiltoniano*, così come descritti ai punti (3A) e (3B), sarà considerata meritoria anche un'eventuale soluzione basata sul solo formalismo Lagrangiano.

scrivono quest'ultimo sistema meccanico, il quale, con l'introduzione del suddetto nuovo vincolo, è ora a due gradi di libertà. Se ne determinino le costanti del moto.

- (3B) Si considerino ora dei moti del (nuovo) sistema meccanico che sono tali che il punto P descrive un'orbita circolare, la quale giace su un piano orizzontale, quindi, parallelo al piano Oxy . A partire dallo studio delle equazioni del moto, si deduca la condizione che deve essere soddisfatta dal periodo di questi moti circolari, affinché essi esistano. Inoltre, si spieghi perché è impossibile che durante tali moti circolari il punto P si trovi sempre al di sopra del piano Oxy .