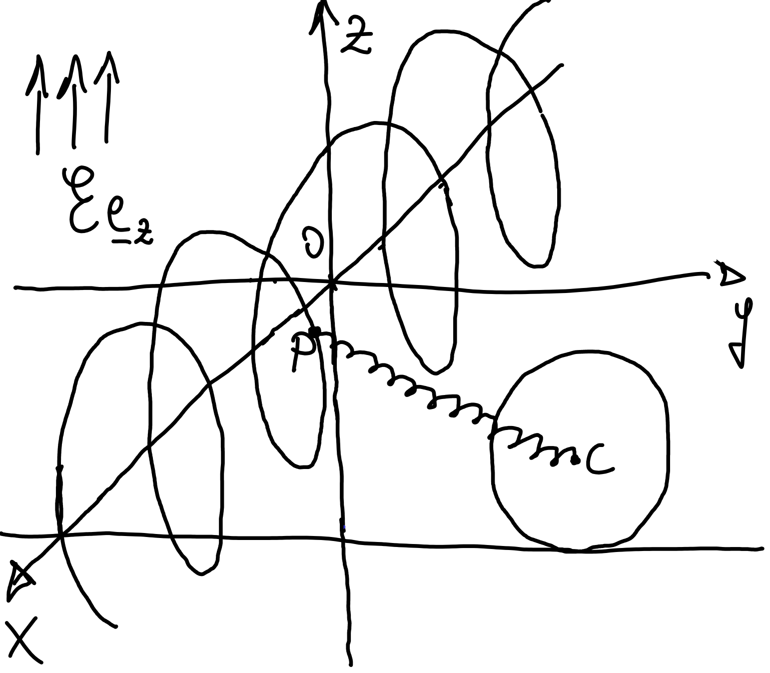


Appello di FM1 del 15/09/2022

massa anello = m = massa punto P
P su elica di eq. ($x=\ell\alpha$, $y=R\sin\alpha$, $z=R\cos\alpha$)
R = raggio anello che rotola senza strisciare su guida che ha $z=-R$ ed è sempre // asse y.
Anello sempre in verticale,
carica pto P = $q>0$, costante elastica molla tra P e C = k
campo elettrico = $\mathcal{E}\underline{e}_z$ con $\mathcal{E}$ costante

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

_ Consideriamo come coordinate libere

$$(\alpha, \xi, \eta),$$

dove α serve a definire l'espressione parametrica dell'elica, mentre ξ, η sono le coordinate (nel piano Oxy) del centro dell'anello.

_ Coordinate dei punti notevoli

$P: (\ell\alpha, R\sin\alpha, R\cos\alpha)$, $C: (\xi, \eta, 0)$

_ Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + \frac{1}{2} m \underline{v}_C \cdot \underline{v}_C + \frac{1}{2} I_{anello}\, \omega^2,$$

vel. ang. dell'anello per il moto in cui rotola senza strisciare dove $\underline{v}_P = \dot{\alpha}\left(\ell, R\cos\alpha, -R\sin\alpha\right)$, $\underline{v}_C = \left(\dot{\xi}, \dot{\eta}, 0\right)$, $\omega = -\frac{\dot{\eta}}{R}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\ell^2+R^2\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2\right) + \frac{1}{2}m\cancel{R^2}\frac{\dot{\eta}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\ell^2+R^2\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2+2\dot{\eta}^2\right)$$

- Energia potenziale

$$U = mg\,z_P - q\mathcal{E}\,z_P + \frac{1}{2}k\,\overline{CP}^2$$

$$= \left(mg - q\mathcal{E}\right)R\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left[\left(\xi-\ell\alpha\right)^2 + \left(\eta - R\sin\alpha\right)^2 + R^2\cos^2\alpha\right]$$

- Lagrangiana

$$L(\alpha,\xi,\eta,\dot{\alpha},\dot{\xi},\dot{\eta}) = \frac{1}{2}m\left(\ell^2+R^2\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2+2\dot{\eta}^2\right) - \left(mg-q\mathcal{E}\right)R\cos\alpha - \frac{1}{2}k\left[\left(\xi-\ell\alpha\right)^2+\left(\eta-R\sin\alpha\right)^2+R^2\cos^2\alpha\right]$$

- Eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} = m\left(\ell^2+R^2\right)\ddot{\alpha} - \left(mg-q\mathcal{E}\right)R\sin\alpha + k\left[\ell\left(\ell\alpha-\xi\right) - R\eta\cos\alpha\right] = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial\xi} = m\ddot{\xi} + k\left(\xi-\ell\alpha\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial\eta} = 2m\ddot{\eta} + k\left(\eta - R\sin\alpha\right) = 0 \end{cases}$$

— o —

(2) Si consideri ora il sistema soggetto a un ulteriore vincolo realizzato in modo t.c. la molla sta sempre in posizione parallela al piano Oyz (cioè $x_P = x_C$). Si determinino tutti i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

—— o ——

La lagrangiana di questo nuovo sistema (lievemente modificato rispetto al precedente) è

$$\mathcal{L}(\alpha, \eta, \dot\alpha, \dot\eta) = L(\alpha, \xi = \ell\alpha, \eta, \dot\alpha, \dot\xi = \ell\dot\alpha, \dot\eta) = \frac{1}{2} m (2\ell^2 + R^2)\dot\alpha^2 + m\dot\eta^2$$
$$- (mg - q\mathcal{E}) R\cos\alpha - \frac{1}{2} k \left[(\eta - R\sin\alpha)^2 + R^2\cos^2\alpha \right],$$

da cui segue che il potenziale (che è dato dai termini che non dipendono quadraticamente da $(\dot\alpha, \dot\eta)$) altro non è che $\mathcal{U}(\alpha, \eta) = (mg - q\mathcal{E}) R\cos\alpha + \frac{1}{2} k\eta^2 - kR\eta\sin\alpha$, dove è stata omessa la costante additiva $\frac{1}{2}kR^2$.

- Punti di equilibrio

Dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} = -(mg - q\mathcal{E}) R\sin\alpha - kR\eta\cos\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = k(\eta - R\sin\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\eta = R\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\Rightarrow kR^2 \sin\alpha \cdot \left(\cos\alpha + \frac{mg - q\mathcal{E}}{kR}\right) = 0$$

$\Downarrow$ $\alpha = 0, \pi + 2n\pi$

$\Downarrow$ $\alpha = \pm\beta + 2n\pi$, dove $\beta := \arccos\left(\frac{q\mathcal{E} - mg}{kR}\right)$

che $\exists$ sse $\left|\frac{q\mathcal{E} - mg}{kR}\right| \leq 1$.

Riassumendo abbiamo le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$(\alpha, \eta) = \left\{ (2n\pi, 0), ((2n+1)\pi, 0), (\pm\beta + 2n\pi, \pm R\sin\beta), \forall n \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Stabilità

Cominciamo dal calcolo di

$$\text{Hess}\, U(\alpha, \eta) = \begin{pmatrix} (q\mathcal{E} - mg)R\cos\alpha + kR\eta\sin\alpha & -kR\cos\alpha \\ -kR\cos\alpha & k \end{pmatrix}$$

- Caso $(\alpha, \eta) = (2n\pi, 0)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Hess}\, U(\alpha, \eta)\Big|_{\substack{\alpha = 2n\pi \\ \eta = 0}} = \begin{pmatrix} (q\mathcal{E} - mg)R & -kR \\ -kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\text{Hess}\, U(\alpha, \eta)\Big|_{\substack{\alpha = 2n\pi \\ \eta = 0}}\right) = k^2R^2 \cdot \left(\frac{q\mathcal{E} - mg}{kR} - 1\right)$$

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} > 1 \Rightarrow \det > 0$ e un el. diag. (k) che è sicuramente positivo $\rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILI

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} = 1 \Rightarrow \det = 0$ e $\mathrm{Tr} > 0 \rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ OCCORRE un SUPPL. di INDAGINE

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} < 1 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILI

– Caso $(\alpha, \eta) = ((2n+1)\pi, 0) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Hess}\, U(\alpha,\eta)\Big|_{\substack{\alpha=(2n+1)\pi \\ \eta=0}} = \begin{pmatrix} (q\mathcal{E}-mg)R & +kR \\ +kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\mathrm{Hess}\, U(\alpha,\eta)\Big|_{\substack{\alpha=(2n+1)\pi \\ \eta=0}}\right) = k^2R^2 \cdot \left(\frac{q\mathcal{E}+mg}{kR} - 1\right)$$

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} < -1 \Rightarrow \det > 0$ e un el. diag. (k) che è sicuramente positivo $\rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILI

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} = -1 \Rightarrow \det = 0$ e $\mathrm{Tr} > 0 \rightarrow$ 1 autov. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ OCCORRE un SUPPL. di INDAGINE

· Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR} > -1 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILI

- Caso $(\alpha,\eta)=(\pm\beta+2n\pi,\pm R\sin\beta)\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$

$$\text{Hess}\,U(\alpha,\eta)\Big|_{\substack{\alpha=\pm\beta+2n\pi\\ \eta=\pm R\sin\beta}}=\begin{pmatrix}(q\mathcal{E}-mg)R\cos\beta+kR^2(1-\cos^2\beta) & -kR\cos\beta\\ -kR\cos\beta & k\end{pmatrix}$$

- Sottocaso $\left|\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR}\right|<1$,

$\det \text{Hess}\,U=(q\mathcal{E}-mg)^2+k^2R^2-2(q\mathcal{E}-mg)^2=-(q\mathcal{E}-mg)^2+k^2R^2>0$.

Siccome uno degli elementi diagonali (cioè k) è sicuramente positivo, allora abbiamo 2 autoval. pos.

$\Rightarrow$ sono pti di equil. STABILI

- Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}-mg}{kR}=1$, allora $\det \text{Hess}\,U=0$ e siccome la traccia $(q\mathcal{E}-mg)R+k>0$, allora 1 autoval. è pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ serve un SUPPLEMENTO di INDAGINE.

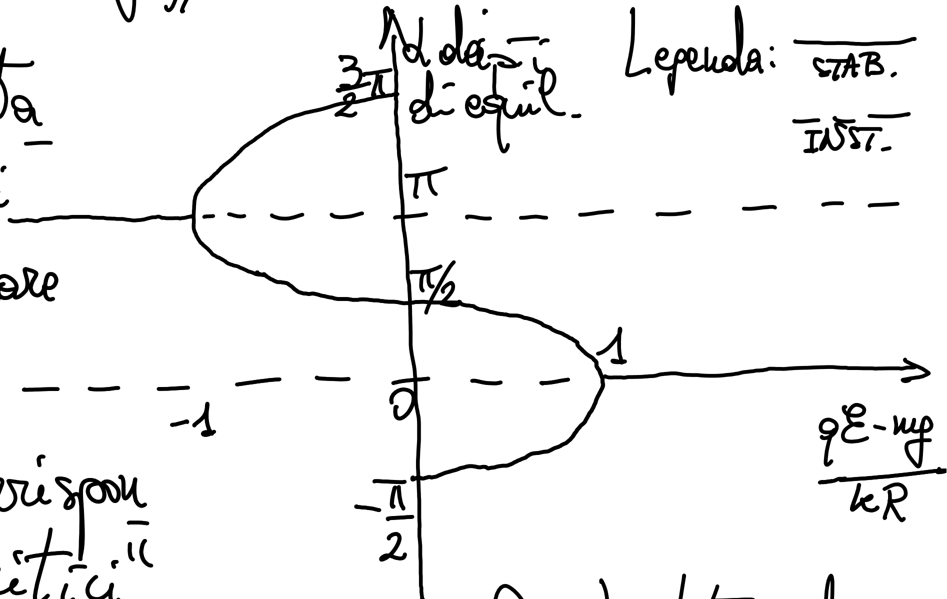
- Studiamo ora a parte le situazioni che necessitano un supplemento di indagine.

Osserviamo che, quando $(q\mathcal{E}-mg)/kR=1$, allora $\beta=0\Rightarrow(\pm\beta+2n\pi,\pm R\sin\beta)=(2n\pi,0)\ \forall n\in\mathbb{Z}$

Inoltre, quando $(q\mathcal{E}-mg)/kR=-1$, allora $\beta=\pi$

ne segue che $(\pm\beta+2n\pi, \pm R\sin\beta) = ((2n+1)\pi, 0)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.
Abbiamo quindi da studiare 2 insiemi separati di punti di equilibrio, cioè $(2n\pi, 0)$ e $((2n+1)\pi, 0)$, in corrispondenza ai valori $+1$ e -1, rispettivamente, del parametro $(q\mathcal{E}-mg)/kR$.

Il riassunto dei risultati riguardo alla stabilità (che possiamo apprezzare nel grafico qui accanto) evidenzia che in corrispondenza ai due "casi critici" abbiamo la tipica biforcazione a forchetta di un punto di equilibrio stabile. Questo ci induce a congetturare che tanto $(2n\pi, 0)$, quando $(q\mathcal{E}-mg)/kR=1$, quanto $(2(n+1)\pi, 0)$, se $(q\mathcal{E}-mg)/kR=-1$, siano in realtà punti di equilibrio stabile.



Per verificarlo studiamo $U : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando $(q\mathcal{E}-mg)/kR=1$. Siccome

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = k(\eta - R\sin\alpha)$$

, allora abbiamo che

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(\alpha, 2R) > 0 \ \forall \alpha\in\mathbb{T} \text{ e } \frac{\partial U}{\partial \eta}(\alpha, -2R) < 0 \ \forall \alpha\in\mathbb{T},$$

ne segue che in $\mathbb{T}\times[-2R,2R]$, la funzione $\mathcal{U}$ non ha p.ti di minimo sulla frontiera $\Rightarrow$ il p.to di minimo assoluto di $\mathcal{U}$ deve essere in un p.to stazionario all'interno di $\mathbb{T}\times(-2R,2R)$. Siccome $(\pi,0)$ è un p.to di sella, quando $(q\mathcal{E}-mg)/kR=1$, allora il p.to di minimo assoluto non può che essere $(0,0)$, che sarà quindi STABILE per il Teorema di Lagrange-Dirichlet (e altrettanto vale per tutti i $(2n\pi,0)\ \forall n\in\mathbb{Z}$). Allo stesso modo si dimostra che $(2(n+1)\pi,0)$ è STABILE $\forall n\in\mathbb{Z}$.

---

(3) Si supponga, ora, che ci sia un altro vincolo realizzato in modo tale che la posizione della molla sia sempre in verticale.

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le eq. di Hamilton per questo nuovo sistema meccanico; si risolvano le eq. del moto per quadrature

(3B) Si verifichi che il valore dell'intensità del campo elettrico $\mathcal{E}$ può essere determinato in modo che esistano dei moti oscillatori del punto P, tali che esso attraversa ripetutamente l'asse delle z con periodo che può divenire grande a piacere.

La lagrangiana di questo nuovo sistema (lievemente modificato rispetto al precedente) è

$$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \dot{\alpha}) = \mathcal{L}\left(\alpha, \eta = R\sin\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\eta} = R\dot{\alpha}\cos\alpha\right) = \frac{1}{2} m\left(2\ell^2 + R^2\right)\dot{\alpha}^2 + m R^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2\alpha$$
$$- \left(mg - q\mathcal{E}\right) R\cos\alpha - \frac{1}{2} k R^2 \cos^2\alpha$$

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \dot{\alpha}) = \tilde{T}(\alpha, \dot{\alpha}) + \tilde{\mathcal{U}}(\alpha)$, dove l'energia cinetica è $\tilde{T}(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{m}{2}\left[2\ell^2 + \left(1 + 2\cos^2\alpha\right)R^2\right]\dot{\alpha}^2$, mentre l'energia potenziale è $\tilde{\mathcal{U}}(\alpha) = \left(mg - q\mathcal{E}\right)R\cos\alpha + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2\alpha$.

Introduciamo $p_\alpha = m\left[2\ell^2 + \left(1 + 2\cos^2\alpha\right)R^2\right]\dot{\alpha} =: \mu(\alpha)\dot{\alpha}$, quindi la Hamiltoniana è definita come segue:

$$H(p_\alpha, \alpha) = p_\alpha \cdot \dot{\alpha} - \tilde{\mathcal{L}}(\alpha, \dot{\alpha})\Big|_{\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{\mu(\alpha)}} = \frac{p_\alpha^2}{2\mu(\alpha)} + \tilde{\mathcal{U}}(\alpha),$$

conseguentemente le eq. di Ham. sono

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha} = -(qE - mg)R\sin\alpha + kR^2\sin\alpha\cos\alpha + \dfrac{p_\alpha^2 \cdot \mu'(\alpha)}{2\mu^2(\alpha)} \\ \dot{\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dfrac{p_\alpha}{\mu(\alpha)} \end{cases}$$

La soluzione per quadrature, si ottiene facilmente dalla seguente legge di conservazione dell'energia, cioè $\tilde{T}(\alpha, \dot{\alpha}) + \tilde{U}(\alpha) = E$. Infatti, procedendo come al solito si ottiene

$$t - t_0 = \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\psi)}\left(E - \tilde{U}(\psi)\right)}} .$$

Per comprendere come svolgere il punto (3B) dobbiamo studiare $\tilde{U}(\alpha)$ in prossimità di $\alpha = 0$ (si osservi che quando il punto P passa per l'asse delle z, allora $\alpha = 0$). Siccome

$$U'(\alpha) = (qE - mg)R\sin\alpha - kR^2\sin\alpha\cos\alpha ,$$

allora abbiamo che $U'(0) = 0$, cioè $\alpha = 0$ (e quindi $p_\alpha = 0$) è un p.to di equilibrio [infatti si verifica facilmente che $(p_\alpha, \alpha) = (0,0)$ è soluzione delle eq. di Hamilton).

Affinché ci siano delle librazioni attorno a $\alpha = 0$, allora deve trattarsi di un p.to di equilibrio stabile. Deve quindi essere $U''(0)>0$ (o, alla peggio, $U''(0)=0$, $U''(\alpha)>0$ in un intorno di $\alpha=0$).

Calcoliamo allora

$$U''(\alpha)=(q\mathcal{E}-mg)R\cos\alpha-kR^2\cos(2\alpha)$$

$$\Rightarrow U''(0)=(q\mathcal{E}-mg)R-kR^2$$

$$\Rightarrow U''(0)>0 \quad \text{se} \quad \frac{q\mathcal{E}-mg}{kR}<1.$$

Siccome per il teorema delle piccole oscillazioni si ha che il periodo $T(E)\to 2\pi\sqrt{A(0)/U''(0)}$ per $E\to U(0)^+$.

Di conseguenza, per avere periodi di oscillazione arbitrariamente grandi, basta porre

$$\mathcal{E}=\frac{mg+kR}{q}+\varepsilon$$

con $\varepsilon>0$ e sufficientemente piccolo, perché il periodo $T\to+\infty$ per $\varepsilon\to 0^+$.