

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
15 Settembre 2022

Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P e da un anello, entrambi di massa m , i quali si muovono in un riferimento inerziale $Oxyz$, con l'asse delle z che è posta in *verticale*. Il punto P è vincolato a muoversi su un'elica inscritta in un cilindro e caratterizzata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = l\alpha \\ y = R \sin \alpha \\ z = R \cos \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} .$$

L'anello ha il suo centro in C , raggio R , spessore infinitesimo e densità di massa omogenea al suo interno. Esso rotola senza strisciare al di sopra di una guida rettilinea di massa trascurabile e di coordinate

$$x = \xi , \quad z = -R ,$$

dove R è ovviamente fisso e ξ è variabile. Ciascuno dei punti che compongono tale guida può quindi traslare parallelamente all'asse x , mentre la giacitura dell'anello è tale che, ad ogni istante, esso si trova in posizione parallela al piano verticale Oyz . Una molla ideale e di lunghezza a riposo nulla, collega il punto P al centro dell'anello C ; il valore della sua costante elastica è uguale a k . Infine, il punto P è dotato di carica q e, quindi, risente degli effetti indotti da un campo elettrico uniforme, di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse *verticale* z .

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero $m, g, l, R, q, \mathcal{E}$ e k , abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che, nel loro moto, l'anello e la guida rettilinea possano attraversare il punto P e la guida a forma di elica, senza che questi oggetti si scontrino. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a un ulteriore vincolo ideale, realizzato in modo tale che la molla stia sempre in direzione parallela al piano Oyz (o, equivalentemente, la coordinata x del punto P sia sempre uguale a quella del centro C). Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

- (3) Si studi ora il sistema quando è soggetto a un altro vincolo ideale (che va ad aggiungersi a quello descritto al punto precedente). Esso è realizzato in modo tale che la molla stia sempre in verticale (o, equivalentemente, adesso anche la coordinata y del punto P sia sempre uguale a quella del centro C).
- (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton che descrivono la dinamica di quest'ultimo sistema meccanico. Successivamente, si scriva la soluzione per quadrature che rappresenta la legge del moto della coordinata libera.
- (3B) Si verifichi che il valore dell'intensità del campo elettrico \mathcal{E} può essere determinato in modo che esistano dei moti oscillatori del punto P , tali che esso attraversa ripetutamente l'asse delle z con periodo (di librazione), il quale può essere arbitrariamente grande.