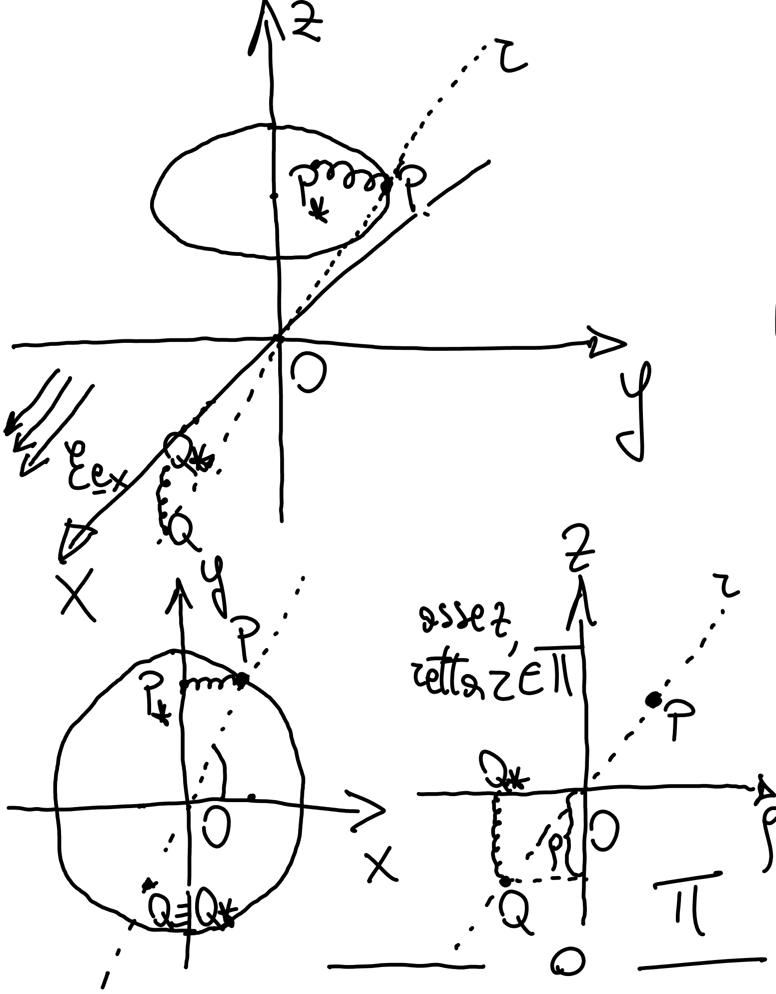



# Appello di FM1 del 27/07/2022

massa anello $= M$, massa $Q = m$
raggio " $= R$, $O, P \in$ retta $r$
centro " $\in$ asse $z$, $Q \in$ retta $r$
$z$ p.ti dell'anello $= R$, $\vec{QQ_*} \perp Oxy$
carica pto $Q = q > 0$, $\vec{PP_*} \perp Oxz$
campo elettrico $= E e_x$ con $E$ costante, costante elastica molle tra $P$ e $P_*$ e tra $Q$ e $Q_* = k$

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange.

- Coordinate libere $(\rho, \vartheta)$ come in figura in dettaglio, $\rho$ è la $z$ di $Q$ e $\vartheta$ è l'angolo che identifica la proiezione di $P$ sul piano $Oxy$.

- Coordinate di alcuni punti notevoli

$P: (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, R)$, $Q: (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho)$, $P^*: (R\cos\vartheta, 0, R)$, $Q^*: (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 0)$

$\Rightarrow \underline{v}_P = R\dot\vartheta(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$, $\underline{v}_Q = (\dot\rho\cos\vartheta - \rho\dot\vartheta\sin\vartheta, \dot\rho\sin\vartheta + \rho\dot\vartheta\cos\vartheta, \dot\rho)$

- Energia cinetica

$$T = T_{anello} + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \frac{1}{2} M R^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} m (\dot\rho^2 + \rho^2\dot\vartheta^2 + \dot\rho^2)$$

- Energia potenziale

$$U = mgz_Q - q\mathcal{E}x_Q + \frac{1}{2}k\overline{P_* P}^2 + \frac{1}{2}k\overline{Q_* Q}^2$$

$$= mg\rho - q\mathcal{E}\rho\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(R^2\sin^2\theta + \rho^2\right)$$

- Calcolo finale della Lagrangiana

$$L(\rho,\theta,\dot\rho,\dot\theta) = m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}\left(MR^2 + m\rho^2\right)\dot\theta^2$$

$$- mg\rho + q\mathcal{E}\rho\cos\theta - \frac{1}{2}k\left(\rho^2 + R^2\sin^2\theta\right)$$

e delle eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\rho} - \dfrac{\partial L}{\partial\rho} = 2m\ddot\rho - m\rho\dot\theta^2 + mg - q\mathcal{E}\cos\theta + k\rho = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \left(MR^2 + m\rho^2\right)\ddot\theta + 2m\rho\dot\rho\dot\theta + q\mathcal{E}\rho\sin\theta + kR^2\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

---

(2) Punti di equilibrio e discussione della loro stabilità -

- Determinazione dei punti di equilibrio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\rho} = mg - q\mathcal{E}\cos\theta + k\rho = 0 \Rightarrow \rho = \dfrac{-mg + q\mathcal{E}\cos\theta}{k} \\ \dfrac{\partial U}{\partial\theta} = q\mathcal{E}\rho\sin\theta + kR^2\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{k}\left(-q\mathcal{E}mg + q^2\mathcal{E}^2\cos\theta + k^2R^2\cos\theta\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sin\theta}{k}\left[\left(q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2\right)\cos\theta - q\mathcal{E}mg\right]=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sin\theta = 0 \qquad\qquad \cos\theta = \frac{q\mathcal{E}mg}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2}$$

$$\Downarrow$$

$\theta = \pm\beta$ dove $\beta = \arccos\left(\frac{q\mathcal{E}mg}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2}\right)$

che $\exists$ sse $\frac{q\mathcal{E}mg}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2} < 1$

Riassumendo, i p.ti di equilibrio sono

$$(\rho,\theta)\in\left\{\left(\frac{-mg+q\mathcal{E}}{k},0\right),\left(\frac{-mg-q\mathcal{E}}{k},\pi\right),\left(\frac{-mg+q\mathcal{E}\cos\beta}{k},\pm\beta\right)\right\},$$

dove la seconda coppia di p.ti di eq. $\exists$ sse

$$\frac{q\mathcal{E}mg}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2} < 1 .$$

- Discussione della stabilità dei punti di equilibrio
- Calcolo dell'Hessiano dell'energia potenziale

$$\mathrm{Hess}\,U = \begin{pmatrix} k & q\mathcal{E}\sin\theta \\ q\mathcal{E}\sin\theta & q\mathcal{E}\rho\cos\theta + kR^2(2\cos^2\theta-1)\end{pmatrix}$$

- Discussione dei casi particolari.

• Caso $(\rho, \vartheta) = \left(-\frac{mg + q\mathcal{E}}{k}, 0\right)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho = -\frac{mg+q\mathcal{E}}{k} \\ \vartheta = 0}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{mgq\mathcal{E}}{k} + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{k} + kR^2 \end{pmatrix}$$

La matrice è diagonale, con uno dei due autovalori (cioè $k$) che è sicuramente positivo, l'altro è

$$\frac{1}{k}\left(q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2 - mgq\mathcal{E}\right).$$

☐ Sottocaso con $\frac{mg\,q\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2} > 1$

Abbiamo 2 autoval. positivi ⇒ STABILE

☐ Sottocaso con $\frac{mg\,q\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2} < 1$

Abbiamo 1 autoval. pos. e 1 neg. ⇒ INSTABILE

☐ Sottocaso con $\frac{mg\,q\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2} = 1$

Abbiamo 1 autoval. pos. e 1 nullo, occorre un SUPPLEMENTO DI INDAGINE

• Caso $(\rho, \vartheta) = \left(-\frac{mg - q\mathcal{E}}{k}, \pi\right)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho = -\frac{mg-q\mathcal{E}}{k} \\ \vartheta = \pi}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{q\mathcal{E}mg}{k} + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{k} + kR^2 \end{pmatrix}$$

Siccome la matrice è diagonale e entrambi gli autovalori sono evidentemente positivi, allora si tratta di un p.to di equil. STABILE.

• Casi $(\rho, \vartheta) = \left( \frac{-mg + q\mathcal{E}\cos\beta}{k}, \pm\beta \right)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho = \frac{-mg + q\mathcal{E}\cos\beta}{k} \\ \vartheta = \pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & \pm q\mathcal{E}\sin\beta \\ \pm q\mathcal{E}\sin\beta & q\mathcal{E}\left(\frac{-mg+q\mathcal{E}\cos\beta}{k}\right)\cos\beta + kR^2(\cos^2\beta - 1) \end{pmatrix}$$

il cui det $= -q\mathcal{E}mg + q^2\mathcal{E}^2(2\cos^2\beta - 1) + k^2R^2(2\cos^2\beta - 1)$

$$= -q\mathcal{E}mg + (q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2)\cdot\left(2\left(\frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2}\right)^2 - 1\right) =$$

$$= -q\mathcal{E}mg + \frac{2(mgq\mathcal{E})^2}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2} - (q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2)$$

$$= q\mathcal{E}mg\left(-1 + \frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2}\right) + (q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2)\left[\left(\frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2}\right)^2 - 1\right]$$

□ Sottocaso con $\frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2 + k^2R^2} < 1$, allora abbiamo (dall'espressione precedente) che det $< 0$

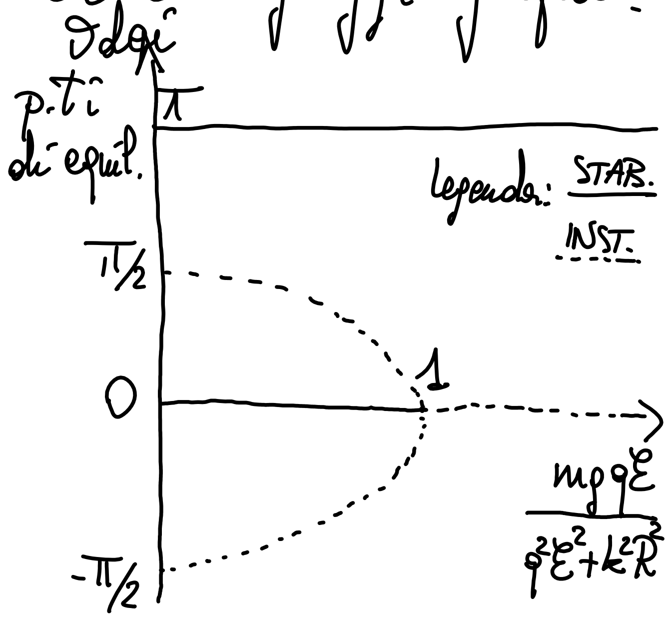
$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

☐ Sottocaso con $\frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2}=1$, allora il determinante è nullo e siccome un elemento diagonale è sicuramente positivo (cioè $k$), allora abbiamo un autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un SUPPLEMENTO DI INDAGINE

- Discussione del caso critico

Osserviamo che, quando $\frac{mgq\mathcal{E}}{q^2\mathcal{E}^2+k^2R^2}=1$, allora $\beta=0 \Rightarrow \left(\frac{-mg+q\mathcal{E}\cos\beta}{k}, \pm\beta\right)$ e $\left(\frac{-mg+q\mathcal{E}}{k}, 0\right)$ sono 3 p.ti coincidenti. Possiamo riassumere la situazione con il seguente linguaggio grafico.

È facile riconoscere la classica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio instabile, quindi siamo portati a congetturare




che il punto di equil. $\left(\frac{-mg+q\mathcal{E}}{k}, 0\right)$ sia INSTABILE.

la dimostrazione della congettura (che è stata appena enunciata) non è banale e quindi viene omessa.

— o —

(3) Si supponga ora che siano trascurabili gli effetti del campo gravitazionale (cioè si ponga $g=0$), del campo elettrico (cioè si ponga $\mathcal{E}=0$) e della molla tra $P$ e $P_*$ (che quindi deve essere omessa).

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per questo nuovo sistema; se ne determinino le costanti del moto.

— o —

La Lagrangiana che descrive il nuovo sistema è la seguente:

$$\mathcal{L}(\rho,\vartheta,\dot\rho,\dot\vartheta) = m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}\left(MR^2+m\rho^2\right)\dot\vartheta^2 - \frac{1}{2}k\rho^2,$$

quindi i momenti sono

$$p_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = 2m\dot\rho\,,\qquad p_\vartheta = \left(MR^2+m\rho^2\right)\dot\vartheta =: \mu(\rho)\,\dot\vartheta\,,\ \text{dove}$$

$\mu(\rho)$ ha le dimensioni di un momento di inerzia

La Hamiltoniana è data dalla seguente espressione:

$$H(p_\rho, p_\theta, \rho, \theta) = p_\rho \dot\rho + p_\theta \dot\theta - L(\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta)\Big|_{\substack{\dot\rho = p_\rho/2m \\ \dot\theta = p_\theta/\mu(\rho)}} =$$

$$= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{\mu(\rho)} - \frac{\cancel{2m}}{2}\frac{p_\rho^2}{(2m)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\cancel{\mu(\rho)}\, p_\theta^2}{(\mu(\rho))^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}k\rho^2$$

$$= \frac{p_\rho^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2\mu(\rho)} + \frac{1}{2}k\rho^2$$

Di conseguenza, le eq. di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot p_\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial \rho} = +\dfrac{p_\theta^2 \mu'(\rho)}{2(\mu(\rho))^2} - k\rho = +\dfrac{p_\theta^2 \cdot \cancel{2}m\rho}{\cancel{2}(MR^2 + m\rho^2)} - k\rho \\ \dot p_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \implies p_\theta \text{ è costante del moto.} \\ \dot\rho = \dfrac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dfrac{p_\rho}{2m} \\ \dot\theta = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{\mu(\rho)} = \dfrac{p_\theta}{MR^2 + m\rho^2} \end{cases}$$

$p_\theta = (MR^2 + m\rho^2)\dot\theta$ e $H(p_\rho, p_\theta, \rho, \theta) = \dfrac{p_\rho^2}{4m} + \dfrac{p_\theta^2}{2\mu(\rho)} + \dfrac{1}{2}k\rho^2$

sono due costanti del moto indipendenti.

—— o ——

(3B) Dopo aver scritto la legge di conservazione dell'energia espressa in funzione di una sola coordinata e della velocità generalizzata ad essa associata, si determini la condizione che

deve essere soddisfatta dai parametri affinché esistano dei moti del punto Q a quota (verticale) costante, anche se Q non si trova mai (durante il moto) ad essere sovrapposto all'origine.
Si determinino le soluzioni delle eq. di Hamilton (scritte in precedenza) per tali moti.

---

Siccome sappiamo che la Hamiltoniana descrive l'energia totale meccanica del sistema, allora abbiamo che

$$E = \frac{p_\rho^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2\mu(\rho)} + \frac{1}{2}k\rho^2 = \frac{(2m\dot{\rho})^2}{4m} + \frac{J^2}{2\mu(\rho)} + \frac{1}{2}k\rho^2$$

$$\Rightarrow E = m\dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{2\mu(\rho)} + \frac{1}{2}k\rho^2 ,$$

dove è stata usata la definizione $p_\rho = 2m\dot{\rho}$ e il fatto che $p_\theta(t) = p_\theta(0)$ è una costante del moto, il cui valore è stato posto uguale a $J$.
Possiamo quindi interpretare la legge di conservazione precedente come quella di un problema di meccanica 1D con forze puramente posizionali, perché

$$E = \frac{1}{2}(2m)\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho),$$

dove la massa è $2m$ e $U_{eff}(\rho) = \frac{J^2}{2\mu(\rho)} + \frac{1}{2}k\rho^2$.

In analogia ai problemi di meccanica 1D con forze posizionali, allora avremo che si possono avere soluzioni di quiete $\rho(t) = \hat{\rho}$ solo quando $\hat{\rho}$ è un p.to stazionario per il potenziale efficace $U_{eff}$, cioè $\hat{\rho}$ è una radice dell'equazione

$$U'_{eff}(\rho) = 0.$$

Calcoliamo

$$U'_{eff}(\rho) = -\frac{J^2 \mu'(\rho)}{[\mu(\rho)]^2 \cdot 2} + k\rho,$$

$\Rightarrow$ Imponiamo che $-\frac{J^2 m\rho}{(MR^2+m\rho^2)^2} + k\rho = 0$

$$\Rightarrow m\rho\left[\frac{k}{m} - \frac{J^2}{(MR^2+m\rho^2)^2}\right] = 0$$

Siccome nel testo si richiede esplicitamente che $\rho \neq 0$, allora la quota $\hat{\rho}$ deve essere tale che

$$\frac{k}{m} = \frac{J^2}{(MR^2+m\hat{\rho}^2)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{|J|}{MR^2+m\hat{\rho}^2}$$

$$\Rightarrow MR^2 + m\hat{\rho}^2 = |J| / \sqrt{k/m} \Rightarrow m\hat{\rho}^2 = \frac{|J|}{\sqrt{k/m}} - MR^2.$$

Quest'ultima equazione ammette sempre due soluzioni reali (uguali in modulo, ma dai segni opposti) e diverse da zero, purché $\boxed{\dfrac{|J|}{\sqrt{k/m}} > MR^2}$,

in tal caso i punti stazionari sono $\hat{\rho} = \pm\sqrt{\dfrac{|J|}{\sqrt{mk}} - \dfrac{M}{m}R^2}$.

Siccome la terza coordinata di Q è proprio $\rho$, allora $\rho(t) = \hat{\rho}$ corrisponde a un moto in cui la quota viene mantenuta costante.

Per poter risolvere le eq. di Hamilton osserviamo che, siccome $\rho(t) = \hat{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \Rightarrow p_\rho(t) = 2m\dot{\rho} = 0$.

Inoltre, siccome $p_\theta = \mu(\rho)\dot{\theta} = \mu(\hat{\rho})\dot{\theta} = J \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \dfrac{J}{\mu(\hat{\rho})}$, quindi anche la velocità angolare è costante.

Ne segue che nel caso con $\rho(0) = \hat{\rho}$, $p_\rho(0) = 0$, $p_\theta(0) = J$, allora le eq. di Hamilton diventano le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{p}_\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial \rho} = +\dfrac{p_\theta^2 m\rho}{(MR^2+m\rho^2)^2} - k\rho = -\dfrac{\partial U_{eff}}{\partial \rho} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\rho} = p_\rho/2m \\ \dot{\theta} = p_\theta/\mu(\rho) \end{cases}$$

Per quanto detto in precedenza,

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \rho}(\hat{\rho}) = 0 ,$$

quindi le eq. di Hamilton per le suddette cond. iniz. sono risolte da

$$p_\rho(t) = 0 , \; p_\theta(t) = J , \; \rho(t) = \hat{\rho} \text{ e } \theta(t) = \frac{J}{\mu(\hat{\rho})} t + \theta(0) ,$$

come si può verificare banalmente.

Infine, si osservi che questi moti non solo hanno quota costante, ma sono a velocità angolare (di rotazione sulla circonferenza intersezione tra il cono a due falde e il piano orizzontale di quota verticale $\hat{\rho}$) che è costante.