

**Prova scritta di Fisica Matematica 1**  
**per il corso di laurea in Matematica**  
**27 Luglio 2022**

Un sistema meccanico è costituito da un anello e da un punto materiale  $Q$  che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale  $Oxyz$ , con asse delle  $z$  *verticale* ascendente. L'anello è perfettamente rigido, di spessore infinitesimo, di massa  $M$ , di raggio  $R$  e di densità di massa omogenea al suo interno; esso vincolato in modo tale da rimanere all'interno del piano *orizzontale* di coordinate  $z = R$  ed è libero di ruotare attorno al suo centro che è posto in corrispondenza all'asse delle  $z$ . Un punto  $P$  dell'anello è collegato tramite una molla elastica alla sua stessa proiezione  $P_*$  sul piano *verticale*  $Oxz$ . Una guida rettilinea di massa trascurabile e lunghezza infinita passa per l'origine e per il punto<sup>[\*]</sup>  $P$ . Il punto materiale  $Q$ , di massa  $m$ , è libero di scorrere sulla guida rettilinea; esso è dotato di carica  $q$  e, quindi, risente degli effetti indotti da un campo elettrico uniforme, di norma uguale a  $\mathcal{E}$ , parallelo ed equiverso all'asse  $x$ . A sua volta, il punto  $Q$  è collegato tramite una molla elastica alla sua stessa proiezione  $Q_*$  sul piano *orizzontale*  $Oxy$ . Entrambe le molle (che sono presenti in questo sistema meccanico) sono di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla.

Si intende che tutti i parametri del problema, ovvero  $m$ ,  $g$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $q$ ,  $\mathcal{E}$  e  $k$ , abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si assume che le masse dei punti  $P$ ,  $P_*$  e  $Q_*$  siano trascurabili. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.
- (2) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e si studi la loro stabilità al variare dei valori dei parametri.
- (3) Si consideri ora il caso in cui tanto il campo elettrico quanto quello gravitazionale abbiano effetti trascurabili (cioè si ponga  $g = \mathcal{E} = 0$ ). Inoltre, si supponga che la molla che collega il punto  $P$  alla sua proiezione  $P_*$  sia stata *rimossa*.
- (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton che descrivono quest'ultimo sistema meccanico. Se ne determinino due costanti del moto indipendenti tra loro.

---

[\*] Si osservi che il luogo geometrico descritto dalla guida per via delle rotazioni dell'anello è un cono a due falde.

(3B) Si scriva opportunamente la legge di conservazione dell'energia in modo che essa dipenda *una sola* coordinata libera e dalla corrispondente velocità generalizzata. Successivamente, si determini la condizione che deve essere soddisfatta dai valori dei parametri (e da quello di una delle costanti del moto di cui al punto (3A) precedente), affinché esistano dei *moti del punto  $Q$  tali che la sua quota verticale rimanga costante* anche se  $Q$  non si trova mai in corrispondenza all'origine.

Infine, si determinino le soluzioni delle equazioni di Hamilton (che sono state scritte così come richiesto al punto (3A) precedente) in corrispondenza ai suddetti moti caratterizzati dal fatto che la quota verticale di  $Q$  è costante.