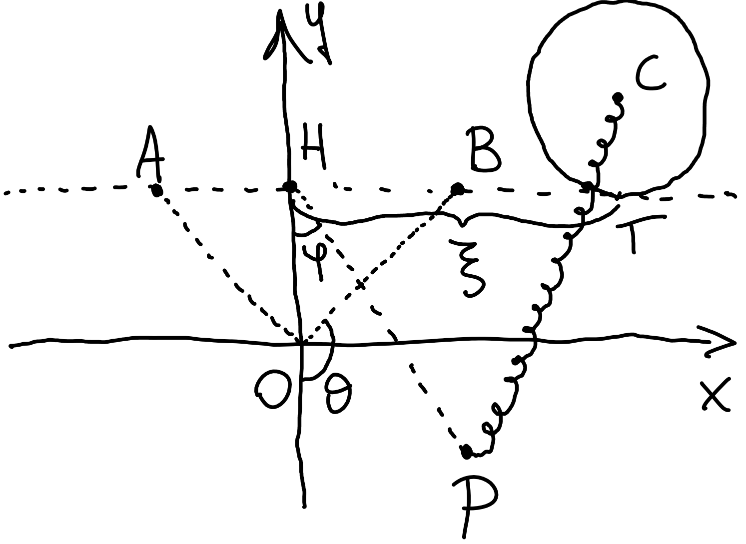


Appello di FM1 del 04/07/2022

massa disco $= M$

raggio " $= R = \overline{OP}$

massa A = massa B = massa P = m

$\overline{OA} = \overline{OB} = \ell$

$H \in$ asse y, $\overline{AH} = \overline{HB}$, $\overline{HP} = 2\ell$

Costante elastica della molla (di lunghezza a riposo nulla) posta tra P e C = k.

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange.

- Coordinate libere $(\xi, \vartheta, \varphi)$, come in figura.
- Coordinate cartesiane di alcuni punti notevoli.

$$A: (-\ell\sin\vartheta, -\ell\cos\vartheta),\ B: (\ell\sin\vartheta, -\ell\cos\vartheta),\ H: (0, -\ell\cos\vartheta)$$

$$C: (\xi, R - \ell\cos\vartheta) \qquad P: (2\ell\sin\varphi, -\ell\cos\vartheta - 2\ell\cos\varphi)$$

- Calcolo dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}M\underline{v}_C\cdot\underline{v}_C + \frac{1}{2}I_{Disco}\left(-\frac{\dot\xi}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_A\cdot\underline{v}_A + \frac{1}{2}m\underline{v}_B\cdot\underline{v}_B$$

$$+ \frac{1}{2}m\underline{v}_P\cdot\underline{v}_P = \frac{1}{2}M(\dot\xi^2 + \ell^2\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{4}M\cancel{R^2}\frac{\dot\xi^2}{\cancel{R^2}} + \cancel{\frac{2}{2}}m\ell^2\dot\vartheta^2$$

$$+ \frac{1}{2}m\ell^2(4\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\vartheta^2\sin^2\vartheta + 4\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\sin\varphi + 4\dot\varphi^2\sin^2\varphi)$$

$$\Rightarrow T = \frac{3}{4} M \dot{\xi}^2 + \frac{\ell^2 \dot{\vartheta}^2}{2}\left(2m + M\sin^2\vartheta\right) + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta + 2m\ell^2\dot{\varphi}^2$$
$$+ 2m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi$$

- Calcolo dell'energia potenziale

$$U = Mg y_C + mg\left(y_A + y_B + y_P\right) + \frac{1}{2} k \overline{PC}^2$$

$$\Rightarrow U = -Mg\ell\cos\vartheta - 2mg\ell\cos\vartheta - mg\ell\left(\cos\vartheta + 2\cos\varphi\right)$$
$$+ \frac{1}{2}k\left[\left(\xi - 2\ell\sin\varphi\right)^2 + \left(R + 2\ell\cos\varphi\right)^2\right]$$
$$= -\left(M + 3m\right)g\ell\cos\vartheta - 2mg\ell\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 4\ell\xi\sin\varphi + 4R\ell\cos\varphi\right),$$

dove sono state omesse varie costanti additive, in quanto non hanno nessuna influenza sulle equazioni del moto.

- Calcolo della Lagrangiana e delle eq. di Lagrange

$$L(\xi, \vartheta, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{3}{4} M\dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2\dot{\vartheta}^2}{2}\left(2 + \sin^2\vartheta\right) + \frac{1}{2} M\ell^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta$$
$$+ 2m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi + \left(M + 3m\right)g\ell\cos\vartheta$$
$$+ 2mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 4\ell\xi\sin\varphi + 4R\ell\cos\varphi\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = \dfrac{3}{2} M\ddot{\xi} + k\left(\xi - 2\ell\sin\varphi\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta} = \left[m\ell^2\left(2 + \sin^2\vartheta\right) + M\ell^2\sin^2\vartheta\right]\ddot{\vartheta} + 2m\ell^2\ddot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi + \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\quad + 2(m+M)\ell^2\dot\vartheta^2\sin\vartheta\cos\vartheta + 2m\ell^2\left(\cancel{\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta\sin\varphi} + \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\varphi\right) \\
\quad - (m+M)\ell^2\cancel{\dot\vartheta^2\sin\vartheta\cos\vartheta} \; \cancel{-2m\ell^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta\sin\varphi} + (M+3m)g\ell\sin\vartheta = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 4m\ell^2\ddot\varphi + 2m\ell^2\ddot\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi + 2m\ell^2\left(\dot\vartheta^2\cos\vartheta\sin\varphi + \cancel{\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\varphi}\right) \\
\quad \cancel{-2m\ell^2\left(\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\right)} + 2mg\ell\sin\varphi - 2k\ell\xi\cos\varphi - 2kR\ell\sin\varphi = 0
\end{cases}
$$

---

(2) Si consideri il sistema sottoposto all'ulteriore vincolo costituito in modo tale che A, B stiano sull'asse x ($\Rightarrow H$ coincide con O). Limitatamente al caso in cui $m=M=\ell=R=g=1$, si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro k.

- Calcolo della nuova Lagrangiana (e quindi della nuova energia potenziale e della nuova energia cinetica).

$$
\mathcal{L}(\xi,\varphi,\dot\xi,\dot\varphi) = T(\xi,\varphi,\dot\xi,\dot\varphi) - U(\xi,\varphi) = L\left(\xi,\vartheta=\pm\frac{\pi}{2},\varphi,\dot\xi,\dot\vartheta=0,\dot\varphi\right) =
$$

$$
= \frac{3}{4}M\dot\xi^2 + 2m\ell^2\dot\varphi^2 + 2mg\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 4\ell\xi\sin\varphi + 4R\ell\cos\varphi\right)
$$

$\Rightarrow$ (ponendo $M=m=R=\ell=g=1$) $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}(\xi,\varphi,\dot\xi,\dot\varphi) = \frac{3}{4}\dot\xi^2 + 2\dot\varphi^2 + 2\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 4\xi\sin\varphi + 4\cos\varphi\right)}$

$\Rightarrow$ l'energia potenziale è

$$
U(\xi,\varphi) = -2\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 4\xi\sin\varphi + 4\cos\varphi\right)
$$

- Determinazione dei punti di equilibrio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = k(\xi - 2\sin\varphi) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 2\sin\varphi + 2k(-\xi\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 2\sin\varphi \\ \Downarrow \\ 2\sin\varphi(-2k\cos\varphi + (1-k)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \text{ se } 2\sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0, \pi$$

$$\text{o se } 2k\cos\varphi = 1-k \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$\varphi = \pm\beta$ con $\beta = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right]$

che $\exists$ sse $k \geq 1/3$

Riassumendo i punti di equilibrio sono

$$(\xi, \varphi) \in \left\{ (0,0), (0,\pi), (\pm 2\sin\beta, \pm\beta) \right\}$$

con le ultime 2 sol. di equilibrio che $\exists$ sse $k \geq 1/3$.

- Calcolo dell'Hessiano del potenziale

$$\text{Hess}\, U(\xi,\varphi) = \begin{pmatrix} k & -2k\cos\varphi \\ -2k\cos\varphi & 2\cos\varphi + 2k(\xi\sin\varphi - \cos\varphi) \end{pmatrix}$$

- Studio della stabilità dei punti di equilibrio

. Caso $(\xi,\varphi) = (0,0)$

$$\text{Hess}\, U(\xi,\varphi)\Big|_{\substack{\xi=0\\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 2k - 6k^2 = 2k(1-3k)$$

- Sottocaso con $k > 1/3$: $\det < 0 \Rightarrow 1$ autoval. neg.
  $\Rightarrow$ INSTABILE
- Sottocaso con $k < 1/3$: $\det > 0$, $T_2 = 2-k > 0$
  $\Rightarrow 2$ autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILE
- Sottocaso con $k = 1/3$: $\det > 0$, $T_2 = 2 - 1/3 > 0$
  $\Rightarrow 1$ autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ SUPPLEMENTO di INDAGINE

- Caso $(\xi, \varphi) = (0, \pi)$

$$\operatorname{Hess} U(\xi,\varphi)\Big|_{\substack{\xi=0\\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 2k & -2+2k \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -2k-2k^2 < 0$$

$$\Rightarrow 1 \text{ autoval. neg.} \Rightarrow \text{INSTABILE}$$

- Casi $(\xi,\varphi) = (\pm 2\sin\beta, \pm\beta)$

$$\operatorname{Hess} U(\xi,\varphi)\Big|_{\substack{\xi=\pm 2\sin\beta\\ \varphi=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & -2k\cos\beta \\ -2k\cos\beta & 2\cos\beta + 4k\sin^2\beta - 2k\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = 2k\cos\beta + 4k^2(1-\cos^2\beta) - 6k^2\cos^2\beta$$

$$= \cancel{2}k\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k}-1\right) + 4k^2\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-1\right)^2\right) - 4k^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-1\right)^2\right]$$
$$-\cancel{2}k^2\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k}-1\right) = 1-k+4k^2-2+4k-2k^2-k+k^2 = -1+2k+3k^2$$

$$= 3\left(k^2+\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}\right) = 3(k+1)\cdot\left(k-\frac{1}{3}\right)$$

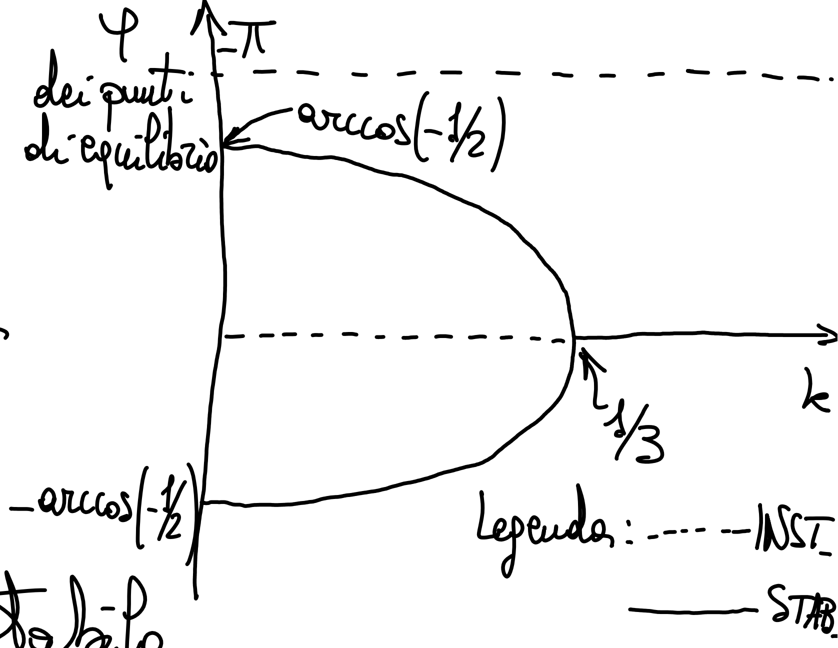
- Sottocaso $k>1/3 \Rightarrow \det>0$, quindi la matrice è def. pos. oppure è def. neg., ma siccome $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = k>0$ (cioè un elemento diagonale è sicuramente positivo) $\Rightarrow$ la matrice $\operatorname{Hess} U(\xi,\varphi)\Big|_{\substack{\xi=\pm 2\sin\beta \\ \varphi=\pm\beta}}$ ha 2 autovalori positivi $\Rightarrow$ STABILI
- Sottocaso con $k=1/3$ $\Rightarrow \det = 0$ e un elemento diagonale è sicuramente positivo $\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un SUPPLEMENTO di INDAGINE
- Il sottocaso con $k<1/3$ non si pone, perché in questa situazione $\nexists$ i p.ti di equilibrio $(\pm 2\sin\beta, \pm\beta)$.

– Supplemento di indagine per il "caso critico" con $k=1/3$.

Osserviamo che quando $k=\frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1/3}-1\right)\right)=0$.

I tre p.ti di equilibrio da studiare, cioè $(\pm 2\sin\beta, \pm\beta)$ e $(0,0)$ sono sovrapposti in quest'ultimo.

Il grafico riassuntivo dei p.ti di equilibrio (qui a destra) evidenzia la classica situazione della biforcazione di un p.to di equilibrio stabile.



Questo ci porta a congetturare che $(0,0)$ sia STABILE quando $k = 1/3$.

Per verificarlo, possiamo procedere come al solito.

Cominciamo ad osservare che la funzione energia potenziale $U(\xi,\varphi) = -2\cos\varphi + \frac{1}{6}\left(\xi^2 - 4\xi\sin\varphi + 4\cos\varphi\right)$ è tale che sul compatto $S = \{(\xi,\varphi) : |\xi| \leq 4,\ \varphi \in \mathbb{T}\}$ non ammette p.ti di minimo sulla frontiera $\partial S = \{(\xi,\varphi) : |\xi| = 4,\ \varphi \in \mathbb{T}\}$, poiché $\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{3}(\xi - 2\sin\varphi) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi}(4R,\varphi) > 0$ e $\frac{\partial U}{\partial \xi}(-4R,\varphi) < 0\ \forall \varphi \in \mathbb{T}$, quindi andando da ∂S verso l'interno di S (tenendo il valore di φ fissato), allora il valore di U decresce. Ne segue che il p.to di minimo assoluto deve stare in $S \setminus \partial S$ e quindi deve essere in corrispon denza a un p.to stazionario, ma allora abbiamo 2 soli candidati al ruolo di p.to di minimo assoluto, cioè $(\xi, \varphi) = (0,0)$ o $(0,\pi)$. Siccome sappiamo che quest'ultimo corrisponde a un p.to di sella (1 autoval. pos. e 1 neg. dell'Hessiano), allora il p.to di minimo assoluto non può che essere $(0,0)$, che è quindi STABILE per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

— o —

(3) Si rimuova il vincolo introdotto al punto (2), ma se ne consideri uno nuovo realizzato in modo t.c. P stia sempre sull'asse delle y, con ordinata maggiore di H. Si supponga che il sistema sia posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costantemente uguale a Ω. Si studi il problema in funzione dei parametri che non sono più fissati come al punto (2). Si ponga $R=0$ (cioè il caso limite in cui il disco degenera in un punto materiale).

— o —

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per questo nuovo sistema meccanico. Si determinino due costanti del moto indipendenti tra loro.

La nuova energia cinetica (in coordinate libere o lagrangiane) è: $\hat{T}(\xi,\vartheta,\dot{\xi},\dot{\vartheta}) = T(\xi,\varphi=-\pi,\vartheta,\dot{\xi},\dot{\varphi}=0,\dot{\vartheta})$

$$= \frac{3}{4}M\dot{\xi}^2 + \frac{m\ell^2\dot{\vartheta}^2}{2}\left(2+\sin^2\vartheta\right) + \frac{M\ell^2\dot{\vartheta}^2}{2}\sin^2\vartheta ,$$

mentre la nuova energia potenziale è

$$\hat{U}(\xi,\vartheta) = -(M+3m)g\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{1}{\cancel{2}}m\Omega^2\left(\cancel{2}\ell^2\sin^2\vartheta\right) - \frac{1}{2}M\Omega^2\xi^2 ,$$

dove abbiamo aggiunto i termini corrispondenti al potenziale centrifugo $-\frac{1}{2}\Omega^2\left[m\left(x_A^2+x_B^2\right)+Mx_C^2\right]$.

La Hamiltoniana è data da

$$H(p_\xi,p_\vartheta,\xi,\vartheta) = p_\xi\cdot\dot{\xi} + p_\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - \hat{\mathcal{L}}(\xi,\vartheta,\dot{\xi},\dot{\vartheta})\Big|_{\substack{\dot{\xi}=\dot{\xi}(p_\xi,p_\vartheta,\xi,\vartheta)\\ \dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}(p_\xi,p_\vartheta,\xi,\vartheta)}} ,$$

dove $p_\xi = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\partial(\hat{T}-\hat{U})}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\partial\hat{T}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{3}{2}M\dot{\xi}$,

$$p_\vartheta = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial(\hat{T}-\hat{U})}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial\hat{T}}{\partial\dot{\vartheta}} = \left[m\ell^2\left(2+\sin^2\vartheta\right)+M\ell^2\sin^2\vartheta\right]\dot{\vartheta}$$

(abbiamo sfruttato il fatto che $\frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\partial\hat{U}}{\partial\dot{\vartheta}} = 0$) .

$$\Rightarrow H(p_\xi,p_\vartheta,\xi,\vartheta) = p_\xi\cdot\frac{p_\xi}{\frac{3}{2}M} + p_\vartheta\cdot\frac{p_\vartheta}{m\ell^2\left(2+\sin^2\vartheta\right)+M\ell^2\sin^2\vartheta}$$

prosegue alla pagina dopo

$$-\frac{1}{2}\frac{\cancel{3M}}{\cancel{2}}\frac{P_\xi}{\cancel{\frac{3}{2}M}}\frac{P_\xi}{\frac{3}{2}M}-\frac{1}{2}\cancel{\mu(\theta)\ell^2}\frac{P_\theta}{\cancel{\mu(\theta)\ell^2}}\frac{P_\theta}{\mu(\theta)\ell^2}+\hat{U}(\xi,\theta),$$

dove $\mu(\theta):=m(2+\sin^2\theta)+M\sin^2\theta$.

$$\Rightarrow H(P_\xi,P_\theta,\xi,\theta)=\frac{P_\xi^2}{3M}+\frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{\mu(\theta)\ell^2}+\frac{1}{2}(k-m\Omega^2)\xi^2-(M+3m)g\ell\cos\theta-m\ell^2\Omega^2\sin^2\theta$$

Possiamo quindi scrivere le eq. di Hamilton come segue:

$$\begin{cases}\dot{P}_\xi=-\frac{\partial H}{\partial \xi}=-(k-m\Omega^2)\xi\\ \dot{\xi}=\frac{\partial H}{\partial P_\xi}=\frac{2P_\xi}{3M}\\ \dot{P}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=+\frac{P_\theta^2\,\mu'(\theta)}{2\mu^2(\theta)\ell^2}-(M+3m)g\ell\sin\theta+2m\ell^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta\\ \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial P_\theta}=\frac{P_\theta}{\mu(\theta)\ell^2}\end{cases}$$

Osservazione: le 2 coppie di eq. di Hamilton nei riquadri qui a fianco sono separate

Le eq. di Hamilton si separano, nel senso che ce ne sono 2 che riguardano solo (P_ξ,ξ) e le altre 2 sono per (p_θ,θ).
Possiamo quindi scrivere $H(P_\xi,P_\theta,\xi,\theta)=\mathcal{H}_\xi(P_\xi,\xi)+\mathcal{H}_\theta(P_\theta,\theta)$,

dove $\mathcal{H}_\xi(P_\xi,\xi)=\frac{P_\xi^2}{3M}+\frac{1}{2}(k-m\Omega^2)\xi^2$ è costante del moto per la prima coppia di eq. di Hamilton (e a maggior ragione anche per la seconda coppia, visto che non dipendono da (p_ξ, ξ)) e $H_\vartheta(p_\vartheta, \vartheta) = \dfrac{p_\vartheta^2}{2\mu(\vartheta)\ell^2} - (M+3m)g\ell\cos\vartheta - m\ell^2\Omega^2\sin^2\vartheta$ è una costante del moto per la seconda coppia di equazioni di Hamilton (e pure per la prima coppia, perché non dipendono da (p_ϑ, ϑ)).

— o —

(3B) Si verifichi che per un'opportuna scelta dei parametri (quale?) esistono delle soluzioni per cui il moto del disco (ridotto a un punto per via dell'assunzione che R sia trascurabile) è rettilineo uniforme.

Essendo le coordinate cartesiane di C $(\xi, R-\ell\cos\vartheta)$, il modo più naturale di avere un moto rettilineo uniforme (per cui $\underline{v}_C$ è costante e $\frac{d}{dt}\underline{v}_C = \underline{0}$) è che $\vartheta(t) = \vartheta(0)$, mentre $\dot\xi(t) = \text{costante}$.

Siccome $\mu(\vartheta) \doteq m(2+\sin^2\vartheta) + M\sin^2\vartheta \Rightarrow \mu(\vartheta) > 0\ \forall\vartheta$ e $\mu'(\vartheta) = (m+M)\sin 2\vartheta$

$\Rightarrow \mu'(\vartheta) = 0$ per $\vartheta = 0, \pi$.

A questo punto, è facile osservare che

$$\begin{cases} \dot p_\vartheta = 0 \\ \dot\vartheta = p_\vartheta / (\mu(\vartheta)\ell^2) = 0 \end{cases} \quad \text{quando } (p_\vartheta(t), \vartheta(t)) = (0,0) \text{ o } (0,\pi)$$

Anche la prima coppia di equazioni di Hamilton può essere trattata in modo molto semplice:

Siccome $\dot{\xi} = \frac{p_\xi}{\frac{3}{2}M} \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{\xi} = \dot{p}_\xi = -\left(k - m\Omega^2\right)\xi$.

Affinché la velocità sia uniforme (cioè l'accelerazione $\ddot{\xi}$ deve essere nulla) abbiamo imporre che

$$k = m\Omega^2 \Rightarrow |\Omega| = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Fatta questa assunzione, allora abbiamo che

$$\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow \dot{\xi}(t) = v_0 \text{ costante}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi(t) = v_0 t + \xi(0)} \Rightarrow p_\xi(t) = \frac{3}{2}M v_0 \text{ costante}$$

Questo è quanto ci veniva richiesto.