Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
4 Luglio 2022

Un sistema meccanico è costituito da un disco e da tre punti materiali A, B e P che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale Oxy, con asse delle y verticale ascendente. Ognuno dei tre punti materiali ha massa m. Sia A che B sono vincolati in modo da soddisfare le condizioni seguenti: essi si possono muovere solo sulla circonferenza di raggio l centrata nell'origine; inoltre, il punto medio H del segmento che congiunge A e B può muoversi solo sull'asse delle y. Da parte sua, il punto P può ruotare attorno a H, ma è vincolato in modo tale da mantenere sempre inalterata la sua distanza $2l$ rispetto al punto H stesso. Una guida rettilinea di lunghezza infinita e massa trascurabile è appoggiata sui punti A e B (in modo tale che essa è sempre parallela all'asse delle x). Il disco è perfettamente rigido, di spessore infinitesimo, di massa M, di raggio R e di densità di massa omogenea al suo interno; esso è libero di scorrere sulla guida rettilinea, ma il suo moto è vincolato in modo tale che il disco rotola senza strisciare sulla guida stessa. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P al centro del disco C. Si intende che tutti i parametri del problema, ovvero m , g , M , R , l e k , abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che il punto P possa attraversare sia la guida che il disco, senza scontrarsi con loro. Si risponda alle domande seguenti.

(1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.

(2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a un ulteriore vincolo ideale, realizzato in modo tale che i punti A e B giacciano sull'asse delle x (in altre parole, il punto H sia ora sempre posto in coincidenza con l'orgine del sistema di riferimento). Limitatamente al caso in cui $m = M = l = R = g = 1$, si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e si studi la loro stabilità, al variare del valore del solo parametro k.

(3) Si rimuova ora il vincolo descritto al punto (2). Si introduca invece un nuovo vincolo ideale, realizzato in modo tale che P sia ora costretto a rimanere sempre sull'asse delle y, con ordinata superiore a quella del punto H. Si supponga inoltre che il sistema di riferimento non sia più inerziale, perché viene posto in rotazione attorno all'asse delle y con velocità angolare costantemente uguale a Ω. Inoltre, si studi il problema in

funzione di tutti i parametri (con l'eccezione di R che è da porsi uguale a 0) i cui valori non sono più da ritenersi fissati come al punto (2). Ci si limiti a considerare il caso limite in cui il raggio R sia trascurabile (in altre parole, si ponga $R = 0$ in modo che il disco degeneri in un punto materiale).

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton [⋆] che descrivono quest'ultimo sistema meccanico. Se ne determinino due costanti del moto indipendenti tra loro.

(3B) Si verifichi che per qualche valore della velocità angolare Ω esistono moti del disco che sono con velocità costante (e non nulla). Si determinino tali valori di Ω e le soluzioni delle equazioni di Hamilton che sono corrispondenti ai suddetti moti linearmente uniformi.

[⋆] Qualora proprio non riesca la discussione degli esercizi *in ambito Hamiltoniano*, così come descritti ai punti (3A) e (3B), sarà considerata meritoria anche un'eventuale soluzione basata sul solo formalismo Lagrangiano.