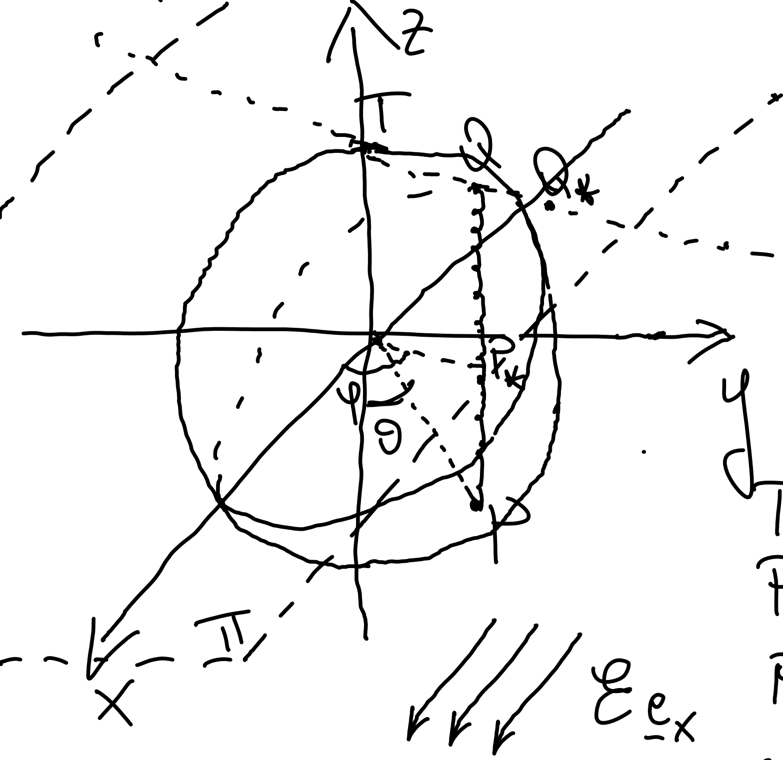


Appello di FM1 del 07/02/2023

massa P = m = massa Q

$\overline{OP} = R$, $Q \in$ piano π

$T = (0,0,R)$, $QP \perp$ piano π

$P \in$ retta passante per T e Q^*.

piano $\pi = \{(x,y,z) : z = R\}$, carica $Q^* = q$,

campo elettrico uniforme $\mathcal{E}\underline{e}_x$; $\overline{TQ^*} = R$,

costante elastica molla tra P e Q = k.

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

- Consideriamo come coordinate libere (θ, φ), dove (θ, φ) sono simili alle coordinate sferiche di P; in realtà φ è l'angolo delle coordinate polari con cui si identifica la proiezione di Q^* quando se ne fa la proiezione sul piano Oxy, mentre θ è la colatitudine misurata a partire dalla semiretta verticale uscente da O e con z negative. Inoltre, θ è preso con segno positivo quando Q è dalla stessa parte di Q^* rispetto a T, mentre θ " " " " negativo se Q e Q^* sono da parti opposte risp. a T $\Rightarrow (\theta, \varphi) \in \mathbb{T}^2$.

- Coordinate di alcuni punti notevoli

Oss. l'en. cinetica è degenere quando $\theta = 0, \pi$, ma per questo esercizio non ci saranno problemi!

P: $(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, -R\cos\theta)$

Q: $(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R)$ e $Q^* = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, R)$.

- Velocità (in coord. sferiche per P e polari per Q)

$$\underline{V}_P = R\dot{\vartheta}\underline{e}_\vartheta + R\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \qquad \underline{V}_Q = R\cos\vartheta\dot{\vartheta}\underline{e}_\rho + R\sin\vartheta\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

- Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m\underline{V}_P\cdot\underline{V}_P + \frac{1}{2}m\underline{V}_Q\cdot\underline{V}_Q = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}mR^2\left(\cos^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

- Energia potenziale

$$U = mg\,z_P + \frac{1}{2}k\overline{PQ}^2 - q\mathcal{E}x_{Q^*}$$

$$= -mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}kR^2(1+\cos\vartheta)^2 - q\mathcal{E}R\cos\varphi$$

- Lagrangiana

$$L(\vartheta,\varphi,\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mR^2(1+\cos^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2 + mR^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}kR^2(1+\cos\vartheta)^2 + q\mathcal{E}R\cos\varphi$$

- Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\vartheta} = mR^2(1+\cos^2\vartheta)\ddot{\vartheta} - \cancel{2}mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \cancel{mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2} \\ \qquad - 2mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + mgR\sin\vartheta - kR^2(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 2mR^2\sin^2\vartheta\,\ddot{\varphi} + 4mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + q\mathcal{E}R\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

---

(2) Equilibri e stabilità

Per determinare i p.ti di equilibrio, dobbiamo studiare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mgR\sin\vartheta - kR^2(1+\cos\vartheta)\sin\vartheta = 0 \implies kR^2\sin\vartheta \cdot \left[\dfrac{mg}{kR} - (1+\cos\vartheta)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = q\mathcal{E}R\sin\varphi = 0 \implies \varphi = 0, \pi \end{cases}$$

$$\sin\vartheta = 0 \implies \vartheta = 0, \pi$$

$$1+\cos\vartheta = \frac{mg}{kR} \implies \cos\vartheta = \frac{mg}{kR} - 1 \implies \vartheta = \pm\beta \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{mg}{kR} - 1\right)$$

che $\exists$ sse $\dfrac{mg}{kR} \leq 2$.

Riassumendo, abbiamo le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta, \varphi) \in \{(0,0), (0,\pi), (\pi, 0), (\pi,\pi), (\pm\beta, 0), (\pm\beta,\pi)\},$$

dove le ultime due coppie esistono se e solo se $\frac{mg}{kR} < 2$.

- Calcolo dell'Hessiano del potenziale

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} (mgR - kR^2)\cos\vartheta - kR^2(2\cos^2\vartheta - 1) & 0 \\ 0 & q\mathcal{E}R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

- Discussione della stabilità

• Caso $(\vartheta, \varphi) = (0,0)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{pmatrix} mgR - 2kR^2 & 0 \\ 0 & q\mathcal{E}R \end{pmatrix}$$

- Sottocaso con $\frac{mg}{kR} > 2$

2 autovalori positivi $\Rightarrow$ p.to di equilibrio STABILE.

- sottocaso con $\frac{mg}{kR} = 2$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\rightarrow$ occorre un SUPPLEMENTO di INDAGINE.

- Sottocaso con $\frac{mg}{kR} < 2$

. Caso con $(\theta, \varphi) = (0, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} mgR - 2kR^2 & 0 \\ 0 & -q\mathcal{E}R \end{pmatrix}$$

Siccome un autovalore (cioè $-q\mathcal{E}R$) è sicuramente negativo $\Rightarrow$ è un p.to di equilibrio INSTABILE

. Caso con $(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\theta=\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & -q\mathcal{E}R \end{pmatrix}$$

2 autoval. neg. $\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE

. Caso con $(\theta, \varphi) = (\pi, 0)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -mgR & 0 \\ 0 & q\mathcal{E}R \end{pmatrix}$$

1 autoval. pos. e 1 neg. $\rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE

• Caso con $(\vartheta,\varphi)=(\pm\beta,0)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\vartheta=\pm\beta\\ \varphi=0}}=\begin{pmatrix}(mgR-kR^2)\cos\beta-kR^2(2\cos^2\beta-1) & 0\\ 0 & q\mathcal{E}R\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(mgR-kR^2)\left(\frac{mg}{kR}-1\right)-kR^2\left[2\left(\frac{mg}{kR}-1\right)^2-1\right] & 0\\ 0 & q\mathcal{E}R\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-kR^2\left[\left(\frac{mg}{kR}-1\right)^2-1\right] & 0\\ 0 & q\mathcal{E}R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kR^2\left[1-\left(\frac{mg}{kR}-1\right)^2\right] & 0\\ 0 & q\mathcal{E}R\end{pmatrix}$$

– Sottocaso con $\frac{mg}{kR}<2$

2 autoval. pos. $\Longrightarrow$ p.ti di equil. STABILI

– Sottocaso con $\frac{mg}{kR}=2$

1 autoval. nullo e 1 pos. $\Rightarrow$ è necessario un SUPPLEMENTO di INDAGINE

Si osservi che il sottocaso con $\frac{mg}{kR}>2$ non è da studiare, poiché per tali valori dei parametri i punti di equil. $(\pm\beta,0)$ non esistono.

• Caso con $(\vartheta,\varphi)=(\pm\beta,\pi)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\vartheta=\pm\beta\\ \varphi=\pi}}=\begin{pmatrix}kR^2\left[1-\left(\frac{mg}{kR}-1\right)^2\right] & 0\\ 0 & -q\mathcal{E}R\end{pmatrix}$$

Siccome un autoval. (cioè $-q\mathcal{E}R$) è sicuramente negativo $\Rightarrow$ p.ti di equil. INSTABILI

– Casi che necessitano di un supplemento di indagine

Osserviamo che i tre casi, ovvero $(\theta,\varphi)=(0,0)$ e $(\theta,\varphi)=(\pm\beta,0)$ quando $\frac{mg}{kR}=2$, cioè $\beta=\arccos\left(\frac{mg}{2kR}-1\right)=0$, sono in realtà coincidenti.

Siccome $U(\theta,\varphi)=f(\theta)+g(\varphi)$, dove $g(\varphi)=-qERcos\varphi$ ha sicuramente un minimo per $\varphi=0$, allora bisogna studiare $f(\theta)$ in prossimità di $\theta=0$ quando $\frac{mg}{kR}=2$.

Ricordiamo che (quando $mg=2kR$)

$$f(\theta)=-mgR\cos\theta+\frac{1}{2}kR^2(1+\cos\theta)^2=kR^2\left[-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\right]$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=kR^2\left[2\sin\theta-\sin\theta(1+\cos\theta)\right]\Rightarrow f'(0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f''(\theta)=kR^2(\cos\theta-\cos2\theta)\Rightarrow f''(0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'''(\theta)=kR^2(-\sin\theta+2\sin2\theta)\Rightarrow f'''(0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f^{IV}(\theta)=kR^2(-\cos\theta+4\cos2\theta)\Rightarrow f^{IV}(0)=3kR^2>0$$

Siccome la prima derivata ad essere diversa da zero è pari (è la quarta) ed è positiva, allora per Taylor-McLaurin si $\theta=0$ è un p.to di minimo.

$\Rightarrow(\theta,\varphi)=(0,0)$ è p.to di minimo e per il th. di Lagrange-Dirichlet si tratta di un p.to di equil. STABILE.

— o —

(3) Si consideri ora il caso in assenza di campo elettrico (cioè $\mathcal{E}=0$).

(3A) Con il metodo del potenziale efficace si introduca una legge di conservazione dell'energia ove compare una sola coordinata e la corrispondente velocità generalizzata. Successivamente, si risolvano le equazioni del moto, procedendo "per quadrature".

— o —

Siccome ora scompare il termine $-q\mathcal{E}R\cos\varphi$ nell'energia potenziale, si osserva immediatamente che φ diventa una variabile ciclica, quindi

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = 2mR^2 \sin^2\vartheta\, \dot\varphi \quad \text{è una costante del moto.}$$

$\Rightarrow \dot\varphi = \dfrac{J}{2mR^2\sin^2\vartheta}$. È conveniente introdurre quest'ultima relazione nella legge di conservazione dell'energia, cioè

$$E = \frac{1}{2}mR^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\dot\vartheta^2 + mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}kR^2\left(1+\cos\vartheta\right)^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\dot\vartheta^2 + U_{eff}(\vartheta),$$

dove
$$U_{eff}(\vartheta) := \frac{J^2}{4mR^2\sin^2\vartheta} + mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}kR^2\left(1+\cos\vartheta\right)^2$$

Dopo aver introdotto la "massa variabile" $\mu(\vartheta) := mR^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)$, possiamo riscrivere la legge di conservazione richiesta in modo ancora più sintetico, cioè $E = \frac{1}{2}\mu(\vartheta)\dot\vartheta^2 + U_{eff}(\vartheta)$.

Al fine di risolvere le eq. per quadrature, cominciamo a separare le variabili nell'eq. di conservazione dell'energia, cioè $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu(\theta)}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)} \Rightarrow dt = \pm \dfrac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\theta)}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)}}$

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tau}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\tau)}\left(E - U_{eff}(\tau)\right)}}\,,$$

da cui si ottiene (per integrazione e inversione) $\theta = \theta(t)$

Dalla legge di conservazione del momento angolare, si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{2mR^2\sin^2\theta} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{J\,d\tau}{2mR^2\sin^2\theta(\tau)}$$

———— o ————

(3B) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per il sistema a un grado di libertà introdotto al punto (3A). Si determini una condizione sufficiente per la costante elastica k affinché ci siano orbite circolari parallele al piano Oxy con quota z positiva.

Per scrivere la Hamiltoniana del sistema non dobbiamo fare altro che riscrivere l'energia in funzione della coordinata θ e del corrispondente momento $p_\theta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$, dove $E = T + U_{eff}$, cioè l'energia cinetica per il sistema a un grado di libertà è

$$T = T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\theta)\dot{\theta}^2 \implies p_\theta = \mu(\theta)\dot{\theta}$$

$$\implies H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\mu(\theta)} + U_{eff}(\theta)$$ è la Hamiltoniana che descrive il sistema a un grado di libertà dove abbiamo ridotto il momento angolare

Le corrispondenti eq. di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\mu'(\theta) p_\theta^2}{2\mu^2(\theta)} - \frac{\partial U_{eff}(\theta)}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu(\theta)} \end{cases}$$

Osserviamo che affinché esistano moti circolari orizzontali deve essere $\dot{\theta} = 0$ (cioè la latitudine è costante!).
Ne segue che $p_\theta = \mu(\theta) \cdot \dot{\theta} = 0 \implies \frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = 0$, da cui ricordando che

$$U_{eff}(\theta) := \frac{J^2}{4mR^2 \sin^2\theta} + mgR\cos\theta - \frac{1}{2}kR^2(1+\cos\theta)^2$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \theta} U_{eff}(\theta) = -\frac{J^2}{2mR^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta} - mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$= \sin\theta\left[-\frac{J^2}{2mR^2}\frac{\cos\theta}{(1-\cos^2\theta)^2} - mgR + kR^2(1+\cos\theta)\right] = 0$$

Escludiamo $\theta = 0, \pi$ perché corrispondono a soluzioni in corrispondenza ai poli verticali, $u = \cos\theta$ deve quindi risolvere l'equazione

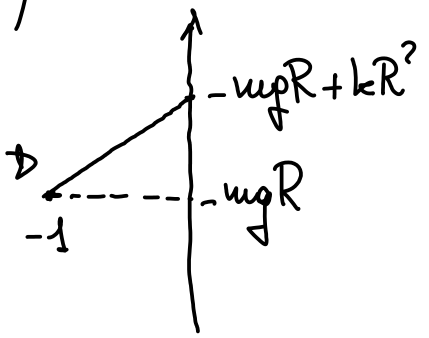
$$-\frac{J^2}{2mR^2}\frac{u}{(1-u^2)^2} - mgR + kR^2(1+u) = 0 \quad \text{con } u \in (-1,0)$$

$$\Rightarrow \; -mgR + kR^2(1+u) = \frac{J^2}{2mR^2}\frac{u}{(1-u^2)^2}$$

definiamo $h(u) = -mgR + kR^2(1+u)$ e $w(u) = \frac{J^2}{2mR^2}\frac{u}{(1-u^2)^2}$,

dobbiamo quindi avere che $h(u) = w(u)$

L'andamento di $h(u)$ è banale.

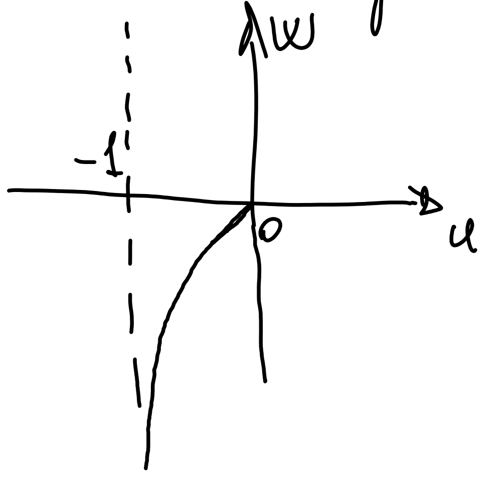


Studiamo l'andamento di $w(u)$.

$$\lim_{u\to -1^+} w(u) = -\infty, \quad \lim_{u\to 0^-} w(u) = 0^-$$

$$w'(u) = \frac{J^2}{2mR^2}\frac{(1-u^2)^2 - 2(1-u^2)(-2u^2)}{(1-u^2)^4} = \frac{J^2}{2mR^2}\frac{1\cancel{-u^2}+\overset{3}{\cancel{4}}u^2}{(1-u^2)^3} > 0$$

Ne segue che il grafico di $w(u)$ sarà del tipo



Dal confronto dei 2 grafici si deduce che se

$$-mg + kR > 0, \text{ allora}$$

$\exists$ almeno 1 valore $\bar{u}$ t.c.

$$h(\bar{u}) = w(\bar{u}),$$

detto $\bar{\theta} = \arccos(\bar{u})$, allora $\theta(t) = \bar{\theta}$ soddisfa le eq. di Hamilton $\Rightarrow$ il moto sarà circolare uniforme con vel. angolare $\dot{\varphi} = \frac{J}{2mR^2 \sin^2\bar{\theta}}$.