Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
7 Febbraio 2023

Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P e Q , entrambi di massa m , i quali si muovono in un riferimento inerziale $Oxyz$, con l'asse delle z che è posta in *verticale*. Sia T il punto di coordinate $(0, 0, R)$, una guida rettilinea di massa trascurabile e lunghezza infinita passa per T , può ruotare attorno ad esso rimanendo sempre parallela al piano orizzontale Oxy . A distanza R da T , sulla guida rettilinea, è posto un punto Q^* di massa trascurabile, ma dotato di carica elettrica q . Il punto materiale P è vincolato a muoversi sulla superficie sferica di raggio R e centrata nell'origine O , in modo tale che la proiezione verticale di P passi per il punto materiale Q che *appartiene* alla guida (in altri termini, Q sta sulla guida e la sua congiungente con P è parallela all'asse z). Una molla ideale e di lunghezza a riposo nulla, collega tra loro i punti P e Q . Il punto Q^* (e con esso la guida rettilinea e, quindi, tutto il sistema) risente degli effetti indotti da un campo elettrico uniforme, di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse x . È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero $m, g, R, q, \mathcal{E}$ e k , abbiano valori reali positivi, finché non verrà specificato il contrario. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che, nel loro moto, la guida rettilinea e il punto Q possano eventualmente attraversare il punto P , senza che questi oggetti si scontrino. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (3) Si consideri ora il caso in cui gli effetti del campo elettrico siano trascurabili (cioè si ponga $\mathcal{E} = 0$).
 - (3A) Utilizzando il metodo del potenziale efficace, si introduca una legge di conservazione dell'energia dove compare una sola coordinata e la corrispondente velocità generalizzata. Successivamente, si risolvano le equazioni del moto, procedendo "per quadrature".
 - (3B) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton che descrivono la dinamica del sistema meccanico a un grado di libertà introdotto al precedente punto (3A). Infine, si determini una condizione sufficiente che deve essere soddisfatta dal valore della costante elastica k , affinché per un qualsiasi valore non-nullo del momento angolare esista almeno un'orbita circolare del punto P , che giace in un piano (orizzontale) parallelo a Oxy con quota verticale z che è positiva.