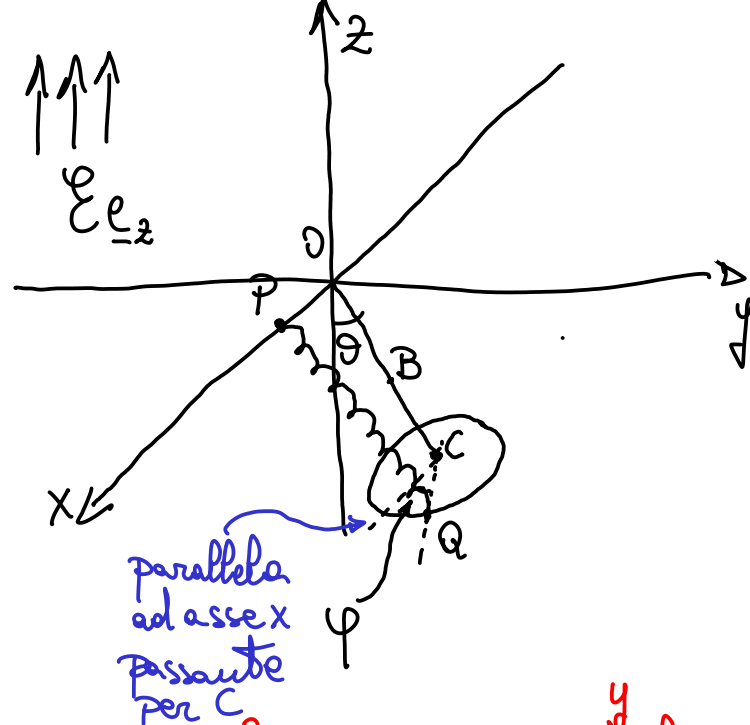
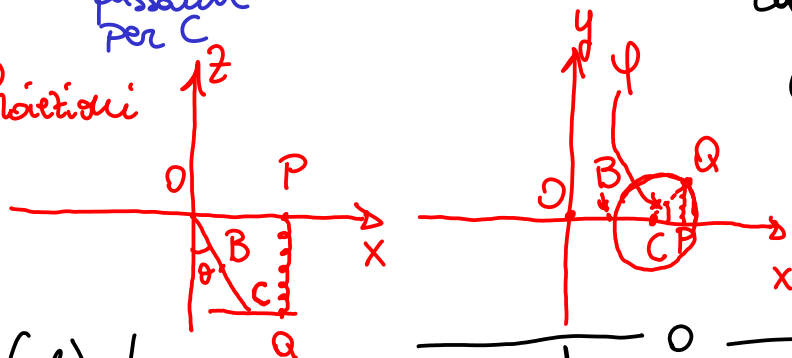


Appello di FOM1 del 29/08/2022



Proiezioni



massa anello = m = massa asta
 raggio " = R lunghezza " = l
 centro " = C " " = $\vec{OC}$
 anello // piano Oxy asta $\in$ piano Oxz
 carica pto $Q = q > 0$, costante elastica
 campo elettrico = E_z con molla tra
 con E costante P e $Q = k$

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange.

- Coordinate libere (θ, φ) così come sono rappresentate in figura e nelle proiezioni.

- Coordinate dei punti notevoli.

$$C: (l \sin \theta, 0, -l \cos \theta) \quad B: \left(\frac{l}{2} \sin \theta, 0, -\frac{l}{2} \cos \theta \right)$$

$$Q: (l \sin \theta + R \cos \varphi, R \sin \varphi, -l \cos \theta) \quad P: (l \sin \theta + R \cos \varphi, 0, 0)$$

- Calcolo dell'energia cinetica

$$T = T_{\text{asta}} + T_{\text{anello}}, \text{ dove } T_{\text{asta}} = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 \text{ (ab-}$$

biamo semplicemente applicato $T_{\text{asta}} = \frac{1}{2} I_{\text{asta}} \dot{\theta}^2$, con il noto valore $I_{\text{asta}} = m l^2 / 3$ dell'inerzia), mentre

$T_{\text{anello}} = \frac{1}{2} m \underline{v}_c \cdot \underline{v}_c + \frac{1}{2} I_{\text{anello}} \dot{\varphi}^2$ per il teorema di König. Siccome $\underline{v}_c = (\ell \dot{\theta} \cos \theta, 0, \ell \dot{\theta} \sin \theta)$ e $I_{\text{anello}} = m R^2$, otteniamo

$$T = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

- Calcolo dell'energia potenziale

$U = m g z_B + m g z_c - q \mathcal{E} z_Q + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2$, che, andando a sostituire i valori delle coordinate dei punti con le loro espressioni in funzione delle coordinate libere, diventa

$$U = -\left(\frac{3}{2} m g - q \mathcal{E}\right) \ell \cos \theta + \frac{1}{2} k \ell^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \varphi$$

- Calcolo della Lagrangiana

Siccome sappiamo che $L = T - U$, otteniamo

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{3}{2} m g - q \mathcal{E}\right) \ell \cos \theta - \frac{k \ell^2 \cos^2 \theta}{2} - \frac{k R^2 \sin^2 \varphi}{2}$$

- Calcolo delle equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{4}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{3}{2} m g - q \mathcal{E}\right) \ell \sin \theta - k \ell^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m R^2 \ddot{\varphi} + k R^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

(2) Configurazioni di equilibrio e studio della loro stabilità.

Innanzitutto, consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \left(\frac{3}{2}mg - qE\right)l \sin \vartheta - kl^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = kl^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi, \pm \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = kl^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi, \pm \pi/2$$

la prima eq. del sistema può essere posta nella forma seguente: $kl^2 \sin \vartheta \left(\frac{\frac{3}{2}mg - qE}{kl} - \cos \vartheta \right) = 0$

$$\sin \vartheta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = 0, \pi$$

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{3}{2}mg - qE}{kl}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \pm \beta \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{\frac{3}{2}mg - qE}{kl}\right)$$

che è definito se $\left| \frac{\frac{3}{2}mg - qE}{kl} \right| \leq 1$

Riassumendo, abbiamo 16 possibili configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta, \varphi) \in \left\{ (0, 0), (0, \pi), (0, \pm \frac{\pi}{2}), (\pi, 0), (\pi, \pi), (\pi, \pm \frac{\pi}{2}), (\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi), (\pm \beta, \pm \frac{\pi}{2}) \right\},$$

dove le ultime 8 soluzioni di quiete (riportate nella seconda riga della formula precedente) esistono se e solo se $\left| \left(\frac{3}{2} m g - q E \right) / k l \right| \leq 1$.

Per quanto riguarda lo studio della stabilità, è essenziale il calcolo di

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2} m g - q E \right) l \cos \vartheta - k l^2 (2 \cos^2 \vartheta - 1) & 0 \\ 0 & k R^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora separatamente tutti i casi corrispondenti alle varie configurazioni di equilibrio:

- Casi $(0, \pm \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \pm \frac{\pi}{2})$ e $(\pm \beta, \pm \frac{\pi}{2})$

In tutti questi 8 casi otteniamo che

$$\text{Hess } U \Big|_{\varphi = \pm \pi/2} = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2} m g - q E \right) l \cos \vartheta - k l^2 (2 \cos^2 \vartheta - 1) & 0 \\ 0 & -k R^2 \end{pmatrix}$$

Siccome uno dei due autovalori (cioè quello che appare sulla diagonale in basso a destra) è sicuramente negativo, allora tutti questi casi saranno sicuramente INSTABILI.

- Casi $(\theta, \varphi) = (0, 0), (0, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=0, \pi}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}\right)l - kl^2 & 0 \\ 0 & kl^2 \end{pmatrix}$$

- Sottocaso $\left(\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}\right)/kl > 1$, allora abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.t. di equil. STABILI
- Sottocaso $\left(\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}\right)/kl < 1$, allora 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.t. di equil. INSTAB.
- Sottocaso $\frac{\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}}{kl} = 1$, allora 1 autoval. è pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ serve un SUPPLEMENTO di INDAGINE.

- Casi $(\theta, \varphi) = (\pi, 0), (\pi, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=0, \pi}} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}\right)l - kl^2 & 0 \\ 0 & kl^2 \end{pmatrix}$$

- Sottocaso $\left(\frac{3}{2}mg - g\mathcal{E}\right)/kl < -1$, allora

abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equil. STABILI

• Sottocaso $\left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)/kl > -1$, allora

1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.ti di equil. INSTAB.

• Sottocaso $\left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)/kl = -1$, allora 1 autoval.

è pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ serve un SUPPLEMENTO di INDAGINE.

- Casi $(\theta, \varphi) = (\pm\beta, 0), (\pm\beta, \pi)$

$$\begin{aligned} \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=0,\pi}} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)l \cos\beta - kl^2(2\cos^2\beta - 1) & 0 \\ 0 & +kR^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)^2 \cdot \frac{1}{k} - 2\left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)^2 \cdot \frac{1}{k} + kl^2 & 0 \\ 0 & kR^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kl^2 \left[1 - \left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)^2 / (kl)^2 \right] & 0 \\ 0 & kR^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Sottocaso $\left|\left(\frac{3}{2}mg - q\mathcal{E}\right)/kl\right| < 1$, allora
abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equil. STABILI

• Sottocasi $(\frac{3}{2} \mu g - qE)/k\ell = \pm 1$, allora 1 autoval.
è pos. e 1 nullo $\rightarrow$ serve un **SUPPLEMENTO di**
INDAGINE.

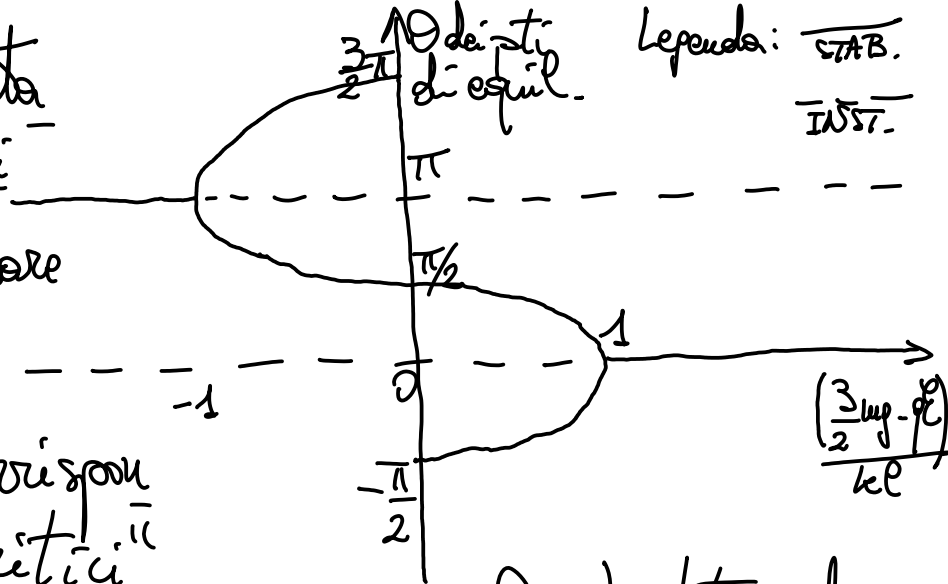
• Ovviamente i sottocasi con $(\frac{3}{2} \mu g - qE)/k\ell > 1$
non vanno considerati, perché $\nexists$ i p.t. di equil.
 $(\theta, \varphi) = (\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi)$ nell'ambito di questa assunzione.

- Studiamo ora a parte le situazioni che
necessitano un supplemento di indagine.

Osserviamo che, quando $(\frac{3}{2} \mu g - qE)/k\ell = 1$,
allora $\beta = 0$, quindi $(\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi)$ coincidono (risp.) con $(\pi, 0), (\pi, \pi)$.
Inoltre, quando $(\frac{3}{2} \mu g - qE)/k\ell = -1$, allora $\beta = \pi$,
quindi $(\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi)$ coincidono rispettivamente con
 $(\pi, 0), (\pi, \pi)$.

Le situazioni di "equilibrio critico" sono quindi 4, ma
siccome il potenziale $U(\theta, \varphi)$ è della forma $U(\theta, \varphi) = f(\theta) + g(\varphi)$
allora la stabilità dei casi critici non dipende da φ ;
di conseguenza, le situazioni da studiare si riducono a 2
sole.

Il riassunto dei risultati riguardo alla stabilità (che possiamo apprezzare nel grafico qui accanto)



evidente che in corrispondenza ai due "casi critici" abbiamo la tipica biforcazione a forchetta di un punto di equilibrio stabile. Questo ci induce a congetturare che tanto $(0,0)$, $(0,\pi)$, quando $(\frac{3}{2}mg - qE)/kl = 1$, quanto $(\pi,0)$, (π,π) , quando $(\frac{3}{2}mg - qE)/kl = -1$, siano punti di equilibrio stabili.

Per verificarlo, ricordiamo che $U(\theta, \varphi) = f(\theta) + g(\varphi)$, dove $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Ci limitiamo a studiare $f(\theta)$.

Nel caso $(\frac{3}{2}mg - qE)/kl = +1$, osserviamo che dei due punti stazionari (cioè per θ corrisp a $0, \pi$) uno dei due, cioè π , è sicuramente p.to di max. poiché in quel caso la derivata seconda è negativa; siccome per il th. di Weierstrass in $\mathbb{T}$ (che è compatto) devono esistere sia il p.to di minimo che quello di max., allora $0 = 0$ non può che essere p.to di minimo e quindi, per il th. di Lagrange-Dirichlet, $(0,0)$ e $(0,\pi)$ sono **STABILI**.

Nel caso $(\frac{3}{2}mg - qE)/kl = -1$, è sufficiente ripetere lo stesso ragionamento per concludere che $(\pi, 0)$ e (π, π) sono **STABILI**.

(3A) Si ponga ora la molla in modo da collegare Q alla sua proiezione Q_* sul piano orizzontale Oxy . Si determinino la Hamiltoniana e le eq. di Hamilton che descrivono questo nuovo sistema meccanico.

Per questo nuovo problema, l'energia potenziale si semplifica in modo tale che sparisce il contributo dovuto all'allungamento della molla in direzione parallela all'asse y , quindi ora

$$U = -\left(\frac{3}{2}mg - qE\right)l \cos\theta + \frac{1}{2}kl^2 \cos^2\theta$$

e la Lagrangiana diventa

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{3}{2}mg - qE\right)l \cos\theta - \frac{1}{2}kl^2 \cos^2\theta.$$

Per definizione, la Hamiltoniana è data da

$$H(P_\theta, P_\varphi, \theta, \varphi) = P_\theta \dot{\theta} + P_\varphi \dot{\varphi} - L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \Big|_{\substack{\dot{\theta} = \dot{\theta}(P_\theta) \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(P_\varphi)}}$$

dove $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3}{4}\frac{P_\theta}{ml^2}$ e $P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{mR^2}$. Se ne deduce che

$$H(P_\theta, P_\varphi, \theta, \varphi) = \frac{3}{8} \frac{P_\theta^2}{m\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{P_\varphi^2}{mR^2} - \left(\frac{3}{2} mgl - q\mathcal{E} \right) \ell \cos\theta + \frac{k\ell^2}{2} \cos^2\theta.$$

Possiamo quindi scrivere le eq. di Hamilton, cioè

$$\begin{cases} \dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\left(\frac{3}{2} mgl - q\mathcal{E} \right) \ell \sin\theta + k\ell^2 \sin\theta \cos\theta \\ \dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\varphi \text{ è una costante del moto.}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{3}{4} \frac{P_\theta}{m\ell^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{mR^2} \end{cases}$$

Ovviamente, anche la Hamiltoniana è una costante del moto, visto che il contributo dovuto a P_φ è separabile, allora osserviamo che anche l'energia

$$E_\theta = \frac{3}{8} \frac{P_\theta^2}{m\ell^2} - \left(\frac{3}{2} mgl - q\mathcal{E} \right) \ell \cos\theta + \frac{k\ell^2}{2} \cos^2\theta$$

è una costante del moto.

(3B) Si risolvano le eq. del moto con il metodo delle quadrature.

Detti T_z e T_θ , rispettivamente, il periodo di rotazione e quello di oscillazione dell'asta attorno alla posizione verticale ascendente. Si verifichi che esistono moti per cui il rapporto T_z/T_θ diventa puro o piacere.

Allo scopo di integrare per quadrature le eq. del moto è conveniente scrivere le due leggi di conservazione separatamente e in funzione delle velocità generalizzate, cioè nella forma

$$\int m R^2 \dot{\varphi} = P_{\varphi} \quad (= \text{costante})$$

$$\left\{ \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + f(\theta) = E_{\theta}, \text{ dove } f(\theta) = \left(\frac{3}{2} m g - q \mathcal{E} \right) l \cos \theta + \frac{k l^2}{2} \cos^2 \theta \right.$$

La prima legge di conservazione descrive un moto rotatorio con velocità angolare uniforme, quindi

$$\dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi}}{m R^2} \rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{P_{\varphi}}{m R^2} t$$

$$\Rightarrow T_z = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = 2\pi \frac{m R^2}{P_{\varphi}} = \text{costante}$$

La soluzione per quadrature del problema di meccanica 1D descritta dalla seconda legge di conservazione, si ottiene con il solito metodo:

$$t - t_0 = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{(E_{\theta} - f(\psi)) / (\frac{2}{3} m l^2)}}$$

dell'asta

Conseguentemente, il periodo di oscillazione tra due estremi θ_- e θ_+ sarà dato da

$$T_0 = 2 \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{d\psi}{\sqrt{(E_{\theta} - f(\psi)) / (\frac{2}{3} m l^2)}}$$

Per verificare che esistono moti per cui $T_2/T_0 < \epsilon$, comunque preso $\epsilon > 0$ (piccolo a piacere), è però conveniente riferirsi alle piccole oscillazioni (perché è assai più semplice).

Cominciamo ad osservare che (per quanto discusso al precedente punto (2)) possiamo avere piccole oscillazioni attorno alla verticale ascendente (individuata da $\vartheta = \pi$) solo se $\vartheta = \pi$ è un p.to di equilibrio stabile, quindi se $(\frac{3}{2}mg - qE)/(ke) \leq -1$.

Sappiamo che, nel limite di piccole oscillazioni, avremo $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2/3}{I''(\pi)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2/3}{ke^2(-\frac{\frac{3}{2}mg - qE}{ke} + 1)}}$

Siccome $\lim_{\frac{\frac{3}{2}mg - qE}{ke} \rightarrow -1^-} T_0 = +\infty$, allora si

comprende facilmente che è sufficiente regolare il campo elettrico E in modo tale che $\frac{\frac{3}{2}mg - qE}{ke}$ sia inferiore a -1 e prossimo proprio a -1 , al fine di rendere T_0 grande a piacere e, quindi, T_2/T_0 piccolo a piacere.