Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
29 Agosto 2022

Un sistema meccanico è costituito da un'asta e da un anello i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z *verticale* ascendente. Entrambi (ovvero, l'asta e l'anello) sono perfettamente rigidi, di spessore infinitesimo, di massa m e di densità di massa omogenea al loro interno. Un estremo dell'asta è posto in corrispondenza all'origine O del sistema di riferimento, essa è vincolata in modo tale che può ruotare (attorno all'origine O) solo nel piano verticale Oxz . Si denoti con la lettera C l'altro estremo dell'asta che *non* è posto in corrispondenza ad O e sia l la lunghezza dell'asta (cioè la distanza tra O e C). L'anello è di raggio R , è vincolato in modo tale da stare sempre sempre in parallelo al piano orizzontale Oxy ed è libero di ruotare attorno al suo centro che è posto in corrispondenza al punto C . Un punto Q dell'anello è collegato tramite una molla elastica di costante elastica k (e lunghezza a riposo nulla) alla sua stessa proiezione P sull'asse delle x . Inoltre, il punto Q è dotato di carica q e, quindi, risente degli effetti indotti da un campo elettrico uniforme, di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse *verticale* z .

Si intende che tutti i parametri del problema, ovvero m , g , l , R , q , $\mathcal{E}$ e k , abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.
- (2) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e si studi la loro stabilità al variare dei valori dei parametri.
- (3) Si studi ora una piccola variazione del sistema meccanico precedente, dove la molla elastica è posta in modo da collegare il punto Q alla sua proiezione Q_* sul piano *orizzontale* Oxy (anziché al punto P che è ora completamente irrilevante per questo nuovo problema).
  - (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton che descrivono quest'ultimo sistema meccanico. Se ne determinino due costanti del moto indipendenti tra loro.
  - (3B) Si scriva opportunamente la legge di conservazione dell'energia in modo che essa dipenda dalle *sole* coordinate libere e dalle corrispondenti velocità generalizzate. Successivamente, si scriva la soluzione per quadrature delle equazioni del moto.

Infine, detti rispettivamente T_r e T_o il periodo di rotazione dell'anello e quello di oscillazione dell'asta attorno alla *verticale ascendente*, si verifichi che il valore dell'intensità del campo elettrico $\mathcal{E}$ può essere scelto in modo da rendere il rapporto T_r/T_o piccolo a piacere.