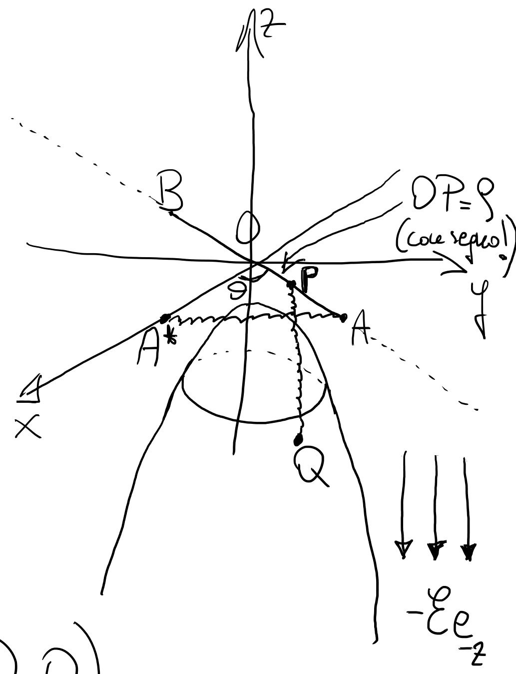
Preappello di FM1

Giugno 2020



massa asta: M

lunghezza " : ℓ

massa punto P: m

Coordinate A^*: $(\ell/2, 0, 0)$

$\vec{PQ} \perp$ piano Oxy. $Q \in$ paraboloide $z = h - (x^2+y^2)$

carica Q: q. Campo elettrico uniforme: $-\mathcal{E}e_z$

Costante molla tra A e $A^* = k_A$; costante molla tra P e Q = k

— o —

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Come coordinate libere o lagrangiane assumiamo (ρ, θ)

dove θ è l'angolo $A^*\hat{O}A$ come in figura mentre ρ è l'ascissa di P rispetto a O sulla guida rettilinea.

Oss. 1 (segno di ρ): ρ può avere sia il segno positivo che quello negativo, a seconda che P si trovi dalla stessa parte di A (rispetto a O) oppure no.

Oss. 2 (assenza di singolarità): nonostante le coordinate (ρ, θ) ricordino moltissimo quelle polari nel piano, qui $\nexists$

La singolarità corrispondente a $\rho=0$, poiché al variare di ϑ (per $\rho=0$) cambia la giacitura dell'asta nel piano Oxy, quindi è preservata la relazione biunivoca tra tutte le possibili configurazioni del sistema e l'insieme dei valori delle coordinate (ρ, ϑ), cioè $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

Coordinate di alcuni punti notevoli:

$A^*: \left(\ell/2, 0, 0\right)$, $A: \left(\frac{\ell}{2}\cos\vartheta, \frac{\ell}{2}\sin\vartheta, 0\right)$,

$B: \left(-\frac{\ell}{2}\cos\vartheta, -\frac{\ell}{2}\sin\vartheta, 0\right)$, $P: \left(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 0\right)$

$Q: \left(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, h-\rho^2\right)$

Per quanto riguarda la velocità ci interessa solo quella di P, perché è l'unico p.to materiale (anche l'asta ha massa, ma il suo contributo all'energia cinetica è ben noto).

$$\underline{v}_P = \left(\dot\rho\cos\vartheta - \rho\dot\vartheta\sin\vartheta, \dot\rho\sin\vartheta + \rho\dot\vartheta\cos\vartheta\right)$$

Passiamo al calcolo dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + T_{asta} = \frac{1}{2} m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\vartheta^2\right) + \frac{1}{24} M\ell^2\dot\vartheta^2$$

e dell'energia potenziale:

$$U = q\mathcal{E} z_Q + \frac{1}{2} k_A \overline{AA_*}^2 + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2,$$

dove $\overline{AA_*}^2 = \frac{\ell^2}{4}\left[(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\right] = \frac{\ell^2}{4}(2-2\cos\vartheta)$

e $\overline{PQ}^2 = z_Q^2 = (h-\rho^2)^2$, quindi

$$U = -q\mathcal{E}\rho^2 - \frac{1}{4}k_A\ell^2\cos\vartheta + \frac{1}{2}k(\rho^4 - 2h\rho^2),$$

dove sono state omesse un paio di inessenziali costanti additive.

Possiamo ora scrivere la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}\left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right)\dot\vartheta^2 + q\mathcal{E}\rho^2 + \frac{1}{4}k_A\ell^2\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(\rho^4 - 2h\rho^2)$$

e le corrispondenti eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = m\ddot\rho - m\rho\dot\vartheta^2 - 2q\mathcal{E}\rho + 2k(\rho^3 - h\rho) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = \left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right)\ddot\vartheta + 2m\rho\dot\rho\dot\vartheta + \frac{1}{4}k_A\ell^2\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

---

(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.

In primo luogo, dobbiamo risolvere

il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \rho} = 2k\rho^3 - 2(kh + q\mathcal{E})\rho = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \dfrac{1}{4} k_A \ell^2 \sin\vartheta = 0 \iff \sin\vartheta = 0 \iff \vartheta = 0, \pi \end{cases}$$

$$\to 2k\rho\left[\rho^2 - \left(h + \frac{q\mathcal{E}}{k}\right)\right] = 0$$

$$\rho = 0 \qquad \qquad \rho = \pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}} \quad \text{quando } h \leq -\underbrace{\frac{q\mathcal{E}}{k}}_{\text{sicuramente } > 0}$$

Riassumendo, abbiamo 6 possibili configurazioni di equilibrio:

$$(\rho, \vartheta) \in \left\{ (0,0), (0,\pi), \left(\pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}}, 0\right), \left(\pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}}, \pi\right) \right\}$$

dove le ultime 4 soluzioni $\exists$ sse $h \leq -\dfrac{q\mathcal{E}}{k}$.

Al fine di discutere la stabilità, è opportuno calcolare preliminarmente l'Hessiano del potenziale:

$$\mathrm{Hess}\,U(\rho,\vartheta)=\begin{pmatrix}6k\rho^2-2(kh+q\mathcal{E}) & 0\\ 0 & \frac{1}{4}k_A\ell^2\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

_ Caso $(\rho,\vartheta)=(0,0)$

$$\mathrm{Hess}\,U(\rho,\vartheta)\Big|_{\substack{\rho=0\\ \vartheta=0}}=\begin{pmatrix}-2(kh+q\mathcal{E}) & 0\\ 0 & \frac{1}{4}k_A\ell^2\end{pmatrix}$$

- Sottocaso $h>-\frac{q\mathcal{E}}{k}$

1 autoval. neg (e 1 pos.) $\Rightarrow$ INSTABILE

- Sottocaso $h=-\frac{q\mathcal{E}}{k}$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un SUPPLEMENTO di INDAGINE.

- Sottocaso $h<-\frac{q\mathcal{E}}{k}$

2 autoval. positivi $\Rightarrow$ STABILE.

- Caso $(\rho, \vartheta) = (0, \pi)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho=0 \\ \vartheta=\pi}} = \begin{pmatrix} -2(kh+q\mathcal{E}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}k_A \ell^2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo sicuramente almeno 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ INSTABILE.

- Caso $(\rho, \vartheta) = \left(\pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}}, 0\right)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho=\pm\sqrt{h+\frac{q\mathcal{E}}{k}} \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} 4(kh+q\mathcal{E}) & 0 \\ 0 & +\frac{1}{4}k_A \ell^2 \end{pmatrix}$$

- Sottocaso $h > -\frac{q\mathcal{E}}{k}$

2 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILI

- Sottocaso $h = -\frac{q\mathcal{E}}{k}$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un SUPPLEMENTO di INDAGINE

- Sottocaso $h < -\frac{q\mathcal{E}}{k}$

Non bisogna studiarlo perché in tale situazione $\nexists$ i p.ti di equilibrio.

- Caso $(\rho, \theta) = \left(\pm \sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}}, \pi \right)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\rho = \pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{2k}} \\ \theta = \pi}} = \begin{pmatrix} 4(kh + q\mathcal{E}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}k_A \rho^2 \end{pmatrix}$$

Almeno 1 degli autovalori è negativo

$\Rightarrow$ INSTABILI.

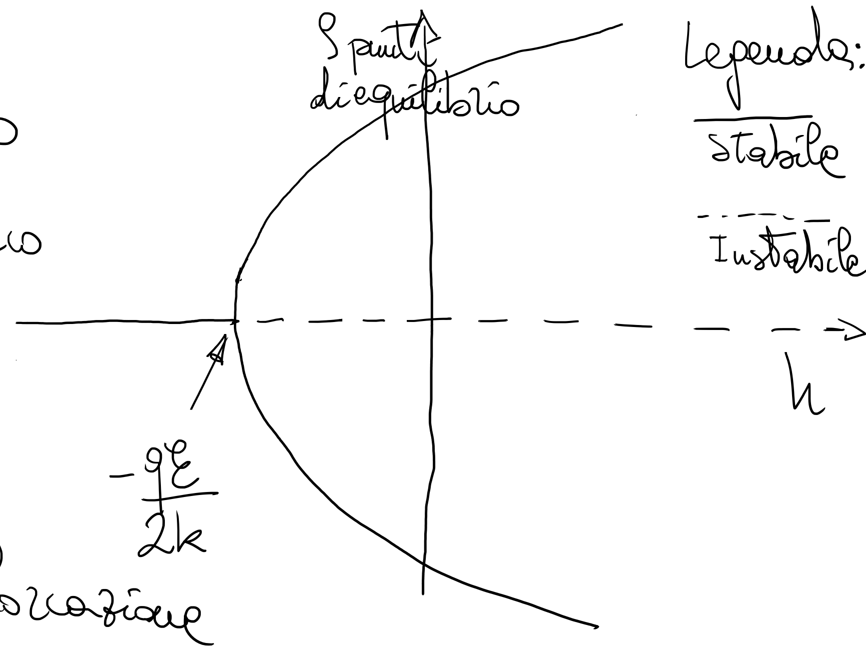
Occupiamoci ora, separatamente, del supplemento d'indagine per i casi indecisi

$$(0,0), \left(\pm\sqrt{h + \frac{q\mathcal{E}}{k}}, 0 \right)$$

quando $h = -\frac{q\mathcal{E}}{k}$.

Si osserva immediatamente che per quel valore di h i 3 p.ti di equilibrio sono coincidenti. Possiamo riassumere la situazione con il seguente grafico

Nel grafico qui a fianco si riconosce la tipica situazione della biforcazione



"a forchetta" di un p.to di equilibrio stabile. Di conseguenza, congetturiamo che $(0,0)$ è stabile per il valore critico del parametro, cioè $h=-\frac{qE}{k}$.

Verifichiamo quest'ultima congettura.

Se $h=-\frac{qE}{k}$, l'energia potenziale diventa

$$U=\frac{1}{2}k\rho^4-\left[\cancel{qE}+\cancel{k\left(-\frac{qE}{k}\right)}\right]\rho^2$$

$$-\frac{1}{4}k_A\ell^2\cos\theta=:f(\rho)+g(\theta),$$

cioè il potenziale è la somma di 2 funzioni che dipendono separatamente da ρ e da θ rispettivamente.

Siccome $\rho=0$ e $\theta=0$ sono p.ti di minimo per f e g, allora $(0,0)$ è p.to di minimo (assoluto) per U

$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di equilibrio stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

—— o ——

(3) Si ponga ora $k_A = 0$.

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton. Si scriva un'equazione di conservazione per il problema a un grado di libertà che descrive il solo moto di P sulla guida rettilinea

—— o ——

Introduciamo i momenti cinetici coniugati a ρ e ϑ, cioè

$$p_\rho = m\dot{\rho} \quad \text{e} \quad p_\vartheta = \left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right)\dot{\vartheta}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = p_\rho / m \quad \text{e} \quad \dot{\vartheta} = p_\vartheta \Big/ \left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right).$$

Possiamo quindi determinare

$$H(p_\rho, p_\vartheta, \rho, \vartheta) = p_\rho\dot{\rho} + p_\vartheta\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}\left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right)\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}k\rho^4 - (qE + kh)\rho^2 \Bigg|_{\substack{\dot{\rho} = p_\rho/m \\ \dot{\vartheta} = p_\vartheta/\left(m\rho^2 + \frac{M\ell^2}{12}\right)}} =$$

$$= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2\left(m\rho^2 + \frac{Ml^2}{12}\right)} + \frac{1}{2}k\rho^4 - (q\mathcal{E}+kh)\rho^2,$$

da cui seguono le eq. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial \rho} = 2k\rho\left(\rho^2 - (q\mathcal{E}+kh)\right) \\ \dot{p}_\theta = 0 \\ \dot{\theta} = p_\rho/m \\ \dot{\rho} = \dfrac{p_\theta}{m\rho^2 + \frac{Ml^2}{12}} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ p_θ è costante del moto, perché θ è ciclica, quindi si conserva il momento angolare totale

$$p_\theta = J = \left(m\rho^2 + \frac{Ml^2}{12}\right)\dot{\theta} \, .$$

Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{p_\rho^2}{2m} + U_{eff}(\rho) = E \, ,$$

dove il potenziale efficace

$$U_{eff}(\rho) = \frac{J^2}{2\left(m\rho^2 + \frac{Ml^2}{12}\right)} + \frac{1}{2}k\rho^4 - (q\mathcal{E}+kh)\rho^2$$

(3B) Sia T_ρ il periodo di tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi di P alla massima distanza da O. Si dimostri che comunque dato $\varepsilon < 0$ $\exists$ valori di h positivi per cui sono piccole le oscillazioni (nel moto radiale) di P, per cui $T_\rho < \varepsilon$.

Andiamo a cercare queste piccole oscillazioni attorno a punti di equilibrio $\hat{\rho}$ che sono così lontani dall'origine che contano solo il termine quartico e quello quadratico, mentre l'altro è trascurabile. In tali condizioni è facile mostrare che $\lim_{\hat{\rho} \to +\infty} U''(\hat{\rho}) = +\infty$ e, quindi, per il teorema delle piccole oscillazioni il periodo va a 0.

Fin qui abbiamo mostrato in modo informale e discorsivo una strategia che può essere portata a termine. Ora convertiamo questa idea in un approccio formalmente rigoroso.

Cerchiamo configurazioni di equilibrio molto distanti dall'origine per grandi valori di h (lo studio al punto (3) dovrebbe aiutare a comprendere che devono esserci dei p.ti di equilibrio $\hat{\rho}(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty$.

Poniamo allora h abbastanza grande da soddisfare quanto segue:

$$[*] \quad h \geq 10\frac{q\mathcal{E}}{k}, \quad \frac{mJ^2}{2\left(mh+\frac{Ml^2}{12}\right)^2} \leq \frac{q\mathcal{E}}{20}$$

Supponiamo che

$$\Rightarrow h \geq \max\left\{10\frac{q\mathcal{E}}{k}, \frac{4J}{\sqrt{mq\mathcal{E}}}\right\},$$ dove la

seconda condizione deriva da

$$\frac{J^2}{2mh^2} \leq \frac{q\mathcal{E}}{20} \Rightarrow h^2 \geq \frac{10J^2}{mq\mathcal{E}} \Rightarrow h \geq \frac{\sqrt{10}J}{\sqrt{mq\mathcal{E}}}$$

Calcoliamo

$$U'_{eff}(\rho) = \left\{\frac{-mJ^2}{\left(m\rho^2+\frac{1}{12}Ml^2\right)^2} + 2\left[k\rho^2 - (q\mathcal{E}+kh)\right]\right\}\rho$$

Dalle disuguaglianze riportate alla riga [*], segue che

$$U'_{eff}(\sqrt{h}) < 0 \quad e \quad U'_{eff}(2\sqrt{h}) > 0$$

e quindi $\exists$ una sol. stazionaria del moto radiale t.c. $\rho(t) = \hat{\rho}$ con $\hat{\rho} > \sqrt{h}$.

Calcoliamo

$$U''_{eff}(\rho) = -\frac{mJ^2}{\left(m\rho^2+\frac{\pi\ell^2}{12}\right)^2} + \frac{4m^2J^2\rho^2}{\left(m\rho^2+\frac{\pi\ell^2}{12}\right)^3} + 2\left[3k\rho^2 - (q\mathcal{E}+kh)\right]$$

Ne segue che (qui usiamo la seconda di [*])

$$U''_{eff}(\hat\rho) \geq \frac{q\mathcal{E}}{10} + 2\left(3kh - kh - \frac{kh}{10}\right)$$

$$\geq \frac{kh}{100} + 4kh - \frac{1}{5}kh > 3kh$$

qui usiamo la prima di [*]

$\Rightarrow$ Applicando il teorema delle piccole oscillazioni a $\hat\rho$ si ottiene che

$$\lim_{E\to U_{eff}(\hat\rho)^+} T(E) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(\hat\rho)}} < 2\pi\sqrt{\frac{m}{3kh}}.$$

Per assicurarsi che esistano orbite di periodo inferiore a ε, basta quindi imporre $2\pi\sqrt{\frac{m}{3kh}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{4\pi^2 m}{3k\varepsilon^2} < h$, quindi basta che $h > \max\left\{\frac{4\pi^2 m}{3k\varepsilon^2}, 10\frac{q\mathcal{E}}{k}, \frac{4J}{\sqrt{mk\mathcal{E}}}\right\}$ affinché esistano le orbite periodiche richieste.