

Preappello di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
Prova scritta per l'ammissione all'orale
12 Giugno 2020

Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P e da un'asta, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. Il punto materiale P è di massa m . L'asta è perfettamente rigida e di densità di massa omogenea al suo interno, è di massa M e lunghezza l ; essa è vincolata in modo che il suo baricentro sia costantemente sovrapposto all'origine O ed è libera di ruotare nel piano orizzontale Oxy . Sull'asta è poggiata una guida rettilinea, che è da considerare di lunghezza infinita e massa trascurabile. Il punto P è libero di scorrere su tale guida. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega P a Q , il quale si muove sul paraboloide di coordinate $z = h - (x^2 + y^2)$ in modo tale da mantenere gli stessi valori delle coordinate x e y del punto P (in altri termini, P è la proiezione di Q sul piano orizzontale Oxy). Anche la massa di Q è da considerarsi trascurabile; invece, il punto Q è dotato di una carica elettrica q , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo all'asse z , ma diretto verso il basso. Siano A e B i vertici dell'asta, sia A^* il punto di coordinate $(l/2, 0, 0)$. Una seconda molla ideale, di costante elastica k_A e lunghezza a riposo nulla, collega A e A^* .

Con la sola eccezione della quota h del vertice del paraboloide, è da intendersi che tutti gli altri parametri del problema, ovvero m, g, M, l, k, k_A, q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Invece, il valore di h può essere positivo, negativo o nullo. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che si possono attraversare senza scontrarsi tra loro e/o con l'asta e/o con il punto P . Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si consideri ora il caso in cui la seconda molla è assente o, equivalentemente, si ponga $k_A = 0$.
- (3A) Si scrivano la Hamiltoniana del sistema e le equazioni di Hamilton. Si scriva un'opportuna equazione di conservazione per il problema meccanico a un solo grado di libertà che descrive il moto di P sulla

guida rettilinea.

- (3B) Sia T_ρ il periodo di tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi di P alla massima distanza dall'origine O . Si verifichi che, comunque dato $\varepsilon > 0$, esistono dei valori *positivi* di h tali che esistono delle piccole oscillazioni (nel moto radiale) di P , per le quali $T_\rho < \varepsilon$.