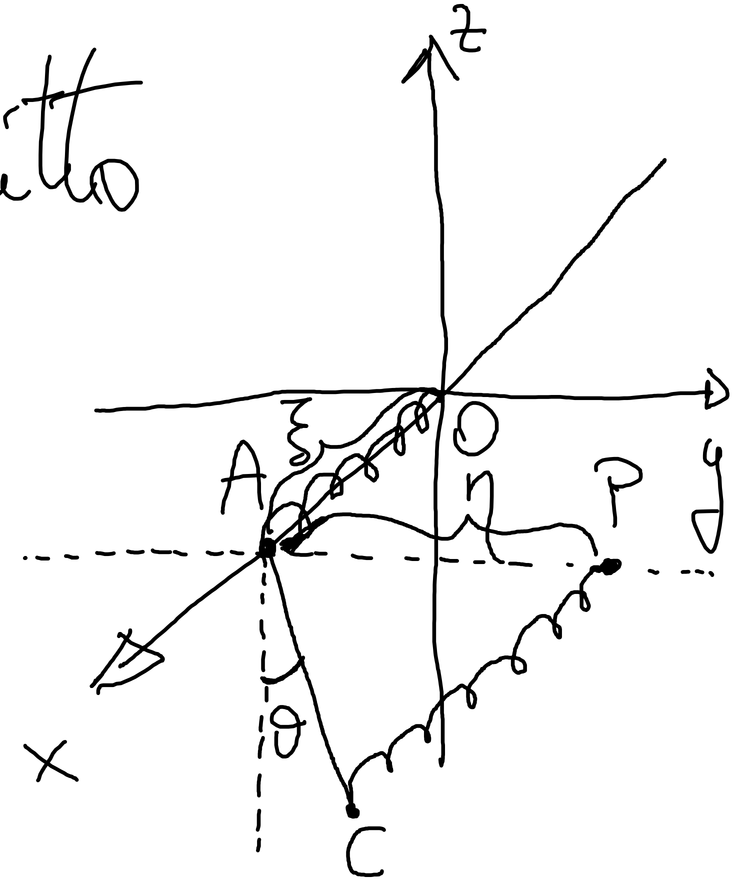
Appello Scritto di FM1 Luglio 2020



massa asta $= M$

lunghezza " $= R$; massa $P = m$

$A \in$ asse x ; $P \in$ piano Oxy ; $x_A = x_P$.

$\vec{AC} \perp$ asse x .

Costante elastica molla tra A e O: k

" " " " C e P: k .

---

(1) Lagrangiana e eq. di Lagrange

Scegliamo come coordinate libere (o lagrangiane), le seguenti:

(ξ, ϑ, η)

così come in figura, cioè ξ è la x del vertice A (e quindi anche di P e di tutta l'asta), ϑ è l'angolo formato dall'asta con la verticale discendente, η è la y del punto P.

Scriviamo le coordinate cartesiane (in funzione di quelle libere) per alcuni p.ti notevoli del problema.

Coordinate di

$A:(\xi, 0, 0)$; $C:(\xi, R\sin\vartheta, -R\cos\vartheta)$

B (= baricentro dell'asta): $\left(\xi, \frac{R}{2}\sin\vartheta, -\frac{R}{2}\cos\vartheta\right)$

$P:(\xi, \eta, 0)$.

Procediamo con il calcolo dell'energia cinetica. Dopo aver notato che tutti i punti dell'asta hanno una componente lungo l'asse x della velocità che è ortogonale a quella dovuta alla rotazione, allora

Possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2),$$

dove, ovviamente, abbiamo sfruttato che l'inerzia dell'asta è $\frac{MR^2}{3}$ e che $\underline{V}_P \cdot \underline{V}_P = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$.

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale, che è costituita da 3 addendi:

$$U = M g z_B + \frac{1}{2} k x_A^2 + \frac{1}{2} k \overline{CP}^2,$$

quindi può essere riscritta come segue in funzione delle coordinate libere:

$$U = -Mg\frac{R}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}k\,\xi^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta^2 - 2R\eta\sin\vartheta\right),$$

dove abbiamo utilizzato la relazione

$$\overline{CP}^2 = \left(R\sin\vartheta - \eta\right)^2 + R^2\cos^2\vartheta =$$

$$= R^2 - 2R\eta\sin\vartheta + \eta^2$$

e abbiamo omesso una costante additiva.

Di conseguenza, la lagrangiana assume la forma seguente:

$$L(\xi,\vartheta,\eta,\dot\xi,\dot\vartheta,\dot\eta) = \frac{1}{2}(M+m)\dot\xi^2 + \frac{MR^2}{6}\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}m\dot\eta^2$$

$$+ Mg\frac{R}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}k\,\xi^2 - \frac{1}{2}k\left(\eta^2 - 2R\eta\sin\vartheta\right).$$

Possiamo ora scrivere le eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\xi} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = (M+m)\ddot\xi + k\xi = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{MR^2}{3}\ddot\theta + Mg\dfrac{R}{2}\sin\theta - kR\eta\cos\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\eta} - \dfrac{\partial L}{\partial \eta} = m\ddot\eta + k(\eta - R\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

---

(2) Determinare i p.ti di equilibrio e discuterne la stabilità.

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = k\xi = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = Mg\dfrac{R}{2}\sin\theta - kR\eta\cos\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = k(\eta - R\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

Da $\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \Longrightarrow \xi = 0$.

Da $\dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \Longrightarrow \eta = R \sin\vartheta$.

Da quest'ultima e dalla 2^a eq. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0\right)$

segue: $kR^2 \sin\vartheta \left(\cos\vartheta - \dfrac{Mg}{2kR}\right) = 0$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\sin\vartheta = 0 \qquad\qquad \cos\vartheta = Mg/(2kR)$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\vartheta = 0, \pi \qquad\qquad \vartheta = \pm\beta$

con $\beta = \arccos\left(\dfrac{Mg}{2kR}\right)$, che $\exists$ sse $Mg/(2kR) \leq 1$.

Riassumendo, abbiamo come sol. di equilibrio $(\xi, \vartheta, \eta) \in \{(0,0,0), (0,\pi,0), (0, \pm\beta, \pm R\sin\beta)\}$.

dove l'ultima coppia di soluzioni esiste sse $\frac{Mg}{2kR} \leq 1$.

Prima di discutere la stabilità nei vari casi, calcoliamo

$$\mathrm{Hess}\,U = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MgR}{2}\cos\vartheta + kR\eta\sin\vartheta & -kR\cos\vartheta \\ 0 & -kR\cos\vartheta & k \end{pmatrix}$$

- Caso $(\xi, \vartheta, \eta) = (0, 0, 0)$

$$\mathrm{Hess}\,U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \vartheta=0 \\ \eta=0}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & MgR/2 & -kR \\ 0 & -kR & k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = k^2 R \left(\frac{\Gamma g}{2} - kR\right) > 0$ sse

$$\frac{\Gamma g}{2kR} > 1.$$

- Sottocaso $\Gamma g / (2kR) > 1$

Siccome il determinante è positivo e l'autovalore (k) è evidente ed è positivo, basta concentrarsi sul minore 2×2 in basso a destra. Siccome gli el. diag. sono tutti positivi, allora

$\Rightarrow$ 3 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILE.

- Sottocaso $\Gamma g / (2kR) = 1$

$\Rightarrow \det = 0$, procedendo come prima,

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$ serve un SUPPL. di INDAGINE

- Sottocaso $\frac{Mg}{2kR} < 1$

$\Rightarrow$ det < 0 $\Rightarrow$ 2 autoval. pos.

e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE.

- Caso $(\xi, \theta, \eta) = (0, \pi, 0)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pi\\ \eta=0}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -MgR/2 & kR \\ 0 & kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = -k^2 R\left(\frac{Mg}{2} + kR\right) < 0$$

Ne segue che c'è sempre un autoval. neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

– Caso $(\xi, \theta, \eta) = (0, \pm\beta, \pm R\sin\beta)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pm\beta\\ \eta=\pm R\sin\beta}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MgR}{2}\cos\beta + kR^2\sin^2\beta & -kR\cos\beta \\ 0 & -kR\cos\beta & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = k\left(MgR\frac{Mg}{4kR} + kR^2 - 2kR^2\frac{M^2g^2}{4k^2R^2} \right)$$

$$= k^2R^2\left(-\frac{M^2g^2}{4k^2R^2} + 1 \right)$$

• Sottocaso $Mg/(2kR) < 1$

$\Rightarrow \det > 0$; siccome 1 autovalore è in evidenza (ed è positivo), possiamo concentrarci sul minore 2x2 in basso a destra che è sicuramente associato a una forma quadratica definita positiva perché il suo sotto-determinante è positivo e un elemento diagonale (cioè k_2) è sicuramente positivo.

- Sottocaso $\frac{Mg}{2kR} = 1$

$\Rightarrow$ det = 0, procedendo come prima,
$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. e 1 nullo
$\Rightarrow$ serve SUPPL. di INDAGINE.

• Sottocaso $\frac{Mg}{2k_2R} > 1$

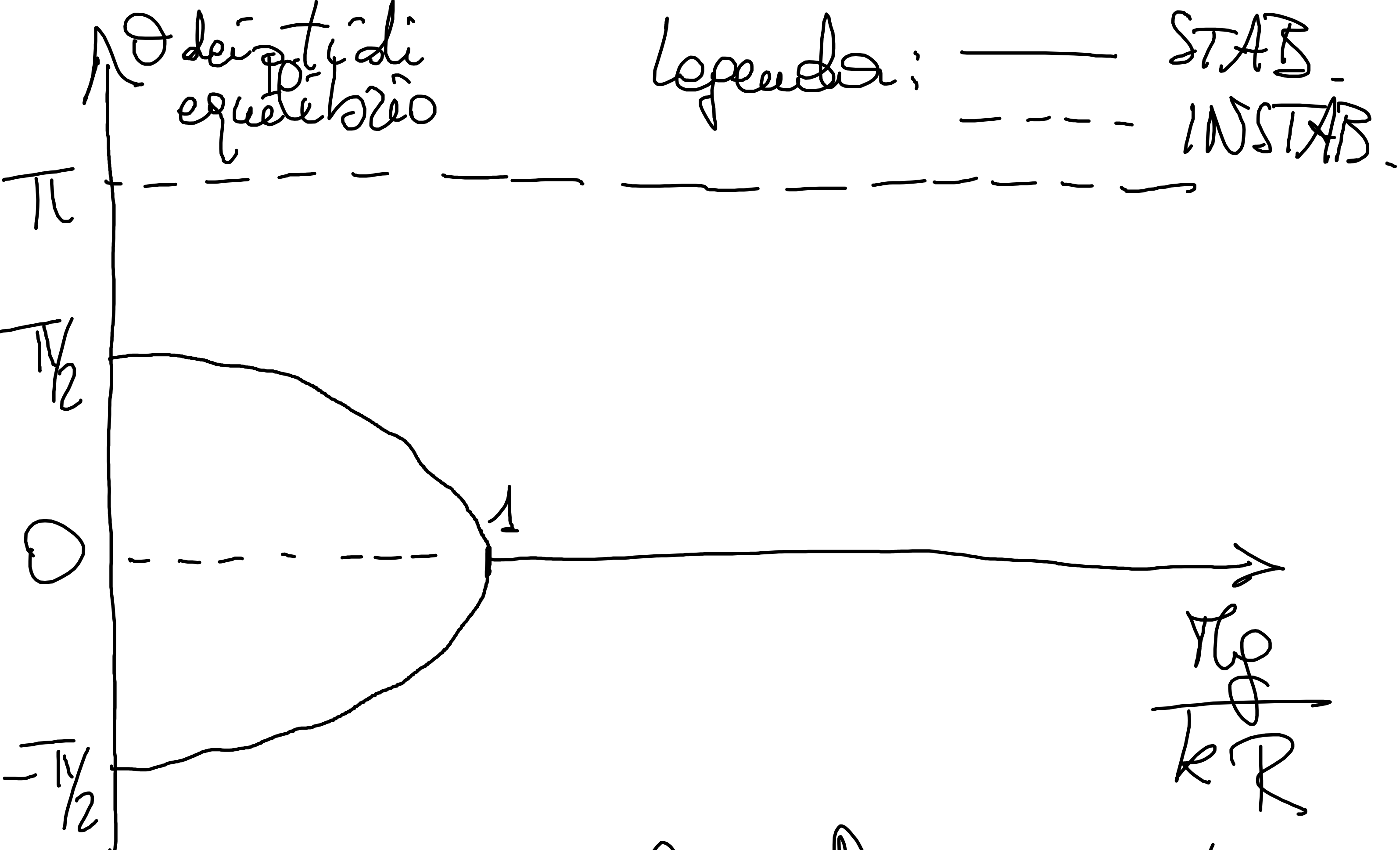
NON è da considerare perché in questa situazione $\nexists$ p.ti di equilibrio.

Ci occupiamo ora dei sottocasi lasciati in sospeso, cioè

$(\xi, \theta, \eta) = (0, 0, 0)$ oppure $= (0, \pm\beta, \pm R\sin\beta)$

con $\beta = \arccos\left(\frac{Mg}{2kR}\right) = 0$ poiché $\frac{Mg}{2kR} = 1$,

pertanto questi 3 p.ti sono coincidenti in $(0, 0, 0)$. La situazione è riassunta nel seguente grafico:



Riconosciamo la classica situazione di biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio stabile, questo ci porta a congetturare che $(0,0,0)$ sia un p.to di equilibrio stabile.

Verifichiamo questa congettura.

$\boxed{\text{toro } 1D}$

Osserviamo che

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(0, \theta, 2R) > kR \quad \forall \theta \in \mathbb{T}$$

e $$\frac{\partial U}{\partial \eta}(0, \theta, -2R) < -kR \quad \forall \theta \in \mathbb{T},$$

quindi nessun p.to alla frontiera dell'insieme compatto

$$S = \{(\xi, \theta, \eta) : \xi = 0, \theta \in [-\pi, \pi], \eta \in [-R, R]\}$$

può essere di minimo, allora il p.to di minimo è all'interno di S quindi deve essere in un p.to stazionario, cioè in $(0,0,0)$ oppure in $(0,\pi,0)$ che però sappiamo essere un p.to di sella $\Rightarrow (0,0,0)$ è un p.to di minimo ed è STABILE per il th. di Lagrange-Dirichlet.

---

(3) Si consideri ora il sistema introdotto prima con un ulteriore vincolo in modo t.c. P coincida con la proiezione di C sul piano orizzontale.

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le eq. di Hamilton.

(3B) Si determinino le costanti del moto e si risolvano le eq. del moto per quadrature.

(3C) Si determinino le condizioni iniziali e le relazioni tra i parametri che devono essere soddisfatte affinché il moto sia sempre nel piano Oyz e sia periodico in modo che l'asta stia sempre sotto al piano orizzontale Oxy, con orbite di librazione comprese tra un minimo di 30° (rispetto alla verticale discendente) e un massimo di 60° (sempre rispetto alla verticale discendente).

—— o ——

Il nuovo vincolo impone quindi che $\eta = R\sin\vartheta$, allora la lagrangiana del nuovo sistema sarà

$$\mathcal{L}(\xi, \vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}) = L(\xi, \vartheta, \eta = R\sin\vartheta, \dot{\xi}, \dot{\vartheta}, R\dot{\vartheta}\cos\vartheta = \dot{\eta}) =$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{\xi}^2 + \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{6} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$+ Mg\frac{R}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}k\xi^2 + \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta\,,$$

da cui segue che i momenti cinetici sono $P_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = (M+m)\dot{\xi}$, $P_\theta = \left(\frac{M}{3} + m\sin^2\theta\right)R^2\dot{\theta}$,

quindi possiamo scrivere la Hamiltoniana

$$H(P_\xi, P_\theta, \xi, \theta) = P_\xi\cdot\dot{\xi} + P_\theta\cdot\dot{\theta} - L\Big|_{\substack{\dot{\xi}=P_\xi/(M+m)\\ \dot{\theta}=P_\theta/\mu(\theta)}}$$

$$\mu(\theta) \doteq \frac{MR^2}{3} + mR^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P_\xi^2}{M+m} + \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{\mu(\theta)} - Mg\frac{R\cos\theta}{2} + \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{kR^2\sin^2\theta}{2}.$$

Le eq. di Hamilton saranno allora

$$\begin{cases} \dot{P}_\xi = -k\xi & \dot{\xi} = P_\xi/(M+m) \\ \dot{P}_\theta = \frac{2mR^2\sin\theta\cos\theta}{(\mu(\theta))^2} - Mg\frac{R}{2}\sin\theta + kR^2\sin\theta\cos\theta & \dot{\theta} = P_\theta/\mu(\theta) \end{cases}$$

Si osserva facilmente che le eq. di Hamilton sono disaccoppiate, cioè quelle sulla prima riga sono prodotte dalla Hamiltoniana

$$H_\xi(p_\xi,\xi)=\frac{1}{2}\frac{p_\xi^2}{M+m}+\frac{k}{2}\xi^2,$$

mentre quelle sulla seconda riga discendono dalla Hamiltoniana

$$H_\theta(p_\theta,\theta)=\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\mu(\theta)}-\frac{MgR}{2}\cos\theta-\frac{kR^2\sin^2\theta}{2}$$

Siccome ogni Hamiltoniana è costante del moto, ne segue che abbiamo le due seguenti costanti del moto:

$$\frac{1}{2}\frac{P_\xi^2}{M+m}+\frac{1}{2}k\xi^2=E_\xi$$

e $$\frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{\mu(\theta)}-Mg\frac{R}{2}\cos\theta-\frac{k_2}{2}R^2\sin^2\theta=E_\theta .$$

La prima coppia di eq. di Hamilton, dopo aver effettuato la sostituzione $P_\xi=(M+m)\dot{\xi}$ è riassunta dalla seguente eq. (di Newton): $(M+m)\ddot{\xi}=-k\xi$, che è evidentemente quella dell'oscillatore armonico $\Rightarrow \xi(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,t+\varphi\right)$ con A e φ costanti di integrazione che dipendono dalle cond. iniz.

$$\Rightarrow P_\xi(t) = (M+m)\dot{\xi} = -\sqrt{(M+m)k}\,A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,t+\varphi\right)$$

Inoltre, se procediamo con la sostituzione $p_\theta = \mu(\theta)\dot{\theta}$, abbiamo che

$$\frac{1}{2}\mu(\theta)\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E_\theta ,$$

dove la nuova energia potenziale di questo problema meccanico 1D è

$$U(\theta) = -Mg\frac{R}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}R^2\sin^2\theta .$$

La soluzione per quadrature del suddetto problema è ben nota

$$t - t_0 = \pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\psi}{\sqrt{2\,(E_\theta - U(\psi))/\mu(\psi)}}$$

Ovviamente, dopo aver determinato (per integrazione e inversione di funzione) la legge del moto

$$t \mapsto \theta(t) \Rightarrow p_\theta = \mu(\theta)\dot{\theta}$$

è l'eq. che fornisce $t \mapsto p_\theta(t)$.

Affinché il moto si svolga nel piano verticale Oyz, deve essere $\xi(t) = 0 \Rightarrow \dot{\xi}(t) = 0$, quindi $\xi(0) = \dot{\xi}(0) = 0$, quindi inizialmente A sta nell'origine con velocità orizzontale nulla.

Invece, affinché il moto sia periodico di librazione tra $\theta_- = \pi/6$ e $\theta_+ = \pi/3$, deve essere soddisfatta la seguente relazione tra le barriere di potenziale:

$$U(\theta_-) = U(\theta_+) = E_0 ,$$

cioè

$$E_0 = -Mg\frac{R}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - k\frac{R^2}{8} = -\frac{MgR}{4} - kR^2 \cdot \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{kR^{\cancel{2}}}{4} = \frac{Mg\cancel{R}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Mg}{kR} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \iff kR = \left(\sqrt{3}-1\right)Mg .$$

Quest'ultima è la relazione che deve essere soddisfatta tra i parametri, mentre le cond. iniz. devono essere t.c.

$$E_0 = Mg R\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}\right) =$$

$$= -\frac{MgR}{8}\left(3\sqrt{3} - 1\right)$$, oppure più semplicemente, si può imporre $\vartheta(0) = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\vartheta}(0) = 0 \Leftarrow p_\vartheta(0) = 0$.