

**Prova scritta di Fisica Matematica 1 per il corso
di laurea in Matematica – 28 Luglio 2020**

Un sistema meccanico è costituito da un'asta e da un punto materiale P che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. L'asta è perfettamente rigida, di spessore infinitesimo, di massa M , di lunghezza R e di densità di massa omogenea al suo interno; siano A e C i suoi vertici. Inoltre, essa è vincolata in modo tale che il vertice A può muoversi solo lungo l'asse delle x e l'asta stessa appartiene al piano Π_A che è parallelo al piano Oyz ed è passante per A . Il punto materiale P è di massa m ed è vincolato in modo tale che si può muovere sulla retta che è intersezione tra Π_A e il piano orizzontale Oxy . Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il vertice A all'origine O . Un'altra molla ideale, sempre di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro il vertice C e il punto P .

Si intende che tutti i parametri del problema, ovvero m, g, M, R, k abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che il punto P possa attraversare l'asta senza scontrarsi con essa. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.
- (2) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità, al variare di tutti i parametri.
- (3) Si introduca un nuovo vincolo ideale, realizzato in modo tale che il punto P stia sempre in coincidenza alla proiezione del vertice C sul piano Oxy (cioè la molla che li congiunge da ora in poi sta sempre in verticale).
 - (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton che descrivono quest'ultimo sistema meccanico, il quale, con l'introduzione del suddetto nuovo vincolo, è ora a due gradi di libertà.
 - (3B) Si determinino due costanti del moto e si risolvano le equazioni di Hamilton, usando, laddove è necessario il metodo "per quadrature".
 - (3C) Si determinino le condizioni iniziali e quali relazioni tra i parametri devono essere soddisfatte affinché il corrispondente moto soddisfi le proprietà seguenti: (I) l'asta e il punto P appartengono sempre al piano Oyz ; (II) il moto è periodico e descrive orbite di librazione per cui l'asta forma un angolo con la direzione verticale discendente dell'asse z che oscilla tra un valore minimo di 30° e un massimo di 60° , senza che l'asta stessa sia mai perfettamente in verticale.