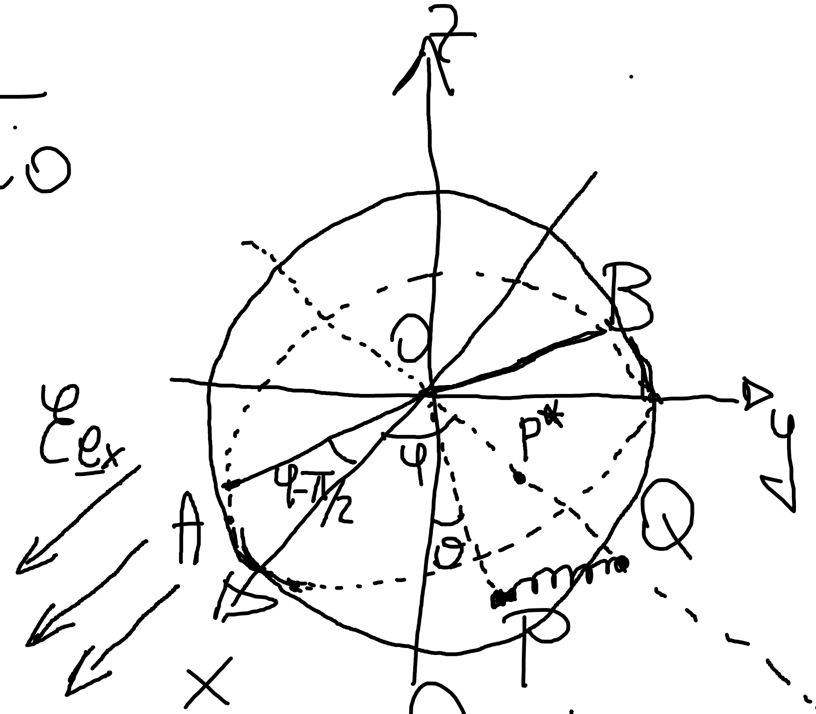
Appello scritto di FM1

Giugno 2020



massa asta $= M$ massa $Q = m$

$\overline{OA} = \overline{OB} = R = \overline{OP}$ massa $P = m$

$\overrightarrow{PP_*} \perp Oxy$ $\overrightarrow{OP_*} \perp AB$

guida rettilinea $\perp AB$ e $\in Oxy$

$Q \in$ guida rettilinea; carica elettrica in A: q

campo elettrico $\mathcal{E} e_x$

costante elastica molla tra P e Q: k.

——— o ———

(1) Lagrangiana e eq. di Lagrange

——— o ———

Osservazione: dette (θ, φ) le coordinate sferiche del punto P, ad esempio come in figura, dove θ è la colatitudine (a partire dalla verticale discendente) e φ è la longitudine, allora gli estremi dell'asta (in coordinate polari nel piano Oxy) corrispondono agli angoli $\varphi \pm \pi/2$.

Scegliamo come coordinate libere

$$(\theta, \varphi, \xi)$$

dove ξ è l'ascissa di P sulla guida rettilinea.

Coordinate cartesiane di alcuni p.ti: A: $\left(R\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right), R\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$

B: $R\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$

P: $R\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta\right)$

Q: $\xi\left(\cos\varphi, \sin\varphi, 0\right)$

Procediamo con il calcolo dell'energia cinetica.

$$T = T_{asta} + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + \frac{1}{2} m \underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q ,$$

dove $T_{asta} = \frac{1}{2} I_{asta} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{M(2R)^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{6}$.

$\underline{v}_P = R\left(\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - \sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}, \cos\theta\sin\varphi\dot{\theta} + \sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi},\right.$
$\left.\sin\theta\dot{\theta}\right) \Rightarrow \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right),$

$$\underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q = \dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2 .$$

In definitiva, abbiamo che

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{3} + m\left(R^2 \sin^2\theta + \xi^2 \right) \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{m \dot{\xi}^2}{2}$$

Inoltre, l'energia potenziale è data da

$$U = mg z_P + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2 - q \mathcal{E} x_A ,$$

cioè (in funzione delle coordinate libere) si ha che

$$U = - mgR\cos\theta + \frac{1}{2} k \left[(\xi - R\sin\theta)^2 + R^2 \cos^2\theta \right] - q \mathcal{E} R \cos(\varphi - \pi/2)$$

$$= -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\xi^2 - kR\xi\sin\theta$$

$$-q\mathcal{E}R\sin\varphi$$, dove abbiamo omesso $kR^2/2$ perché costante.

Possiamo finalmente scrivere la Lagrangiana

$$L(\theta,\varphi,\xi,\dot\theta,\dot\varphi,\dot\xi) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{3} + m\left(R^2\sin^2\theta + \xi^2\right)\right]\dot\varphi^2$$

$$+\frac{m}{2}\dot\xi^2 + mgR\cos\theta - \frac{1}{2}k\xi^2 + kR\xi\sin\theta$$

$$+q\mathcal{E}R\sin\varphi$$

e le corrispondenti eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\ddot\theta - mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 + mgR\sin\theta - kR\xi\cos\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = \left[\dfrac{MR^2}{3} + m\left(R^2\sin^2\theta + \xi^2\right)\right]\ddot\varphi + mR^2\sin(2\theta)\dot\varphi\dot\theta + 2m\xi\dot\xi\dot\varphi - q\mathcal{E}R\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}-\frac{\partial L}{\partial \xi}=m\ddot\xi-m\xi\dot\varphi^2+k\xi-kR\sin\vartheta=0$$

---

(2) Introduciamo un ulteriore vincolo in modo che Q sia sempre sovrapposto a P_*, cioè $PQ \perp Oxy$.
Si determinino i p.ti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

Il nuovo vincolo si traduce nella condizione $\xi=R\sin\vartheta \Rightarrow \dot\xi=-R\cos\vartheta\,\dot\vartheta$, quindi la nuova Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\vartheta,\varphi,\dot\vartheta,\dot\varphi)=L(\vartheta,\varphi,\xi=R\sin\vartheta,\dot\vartheta,\dot\varphi,\dot\xi=-R\cos\vartheta\dot\vartheta)=$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \left(1+\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}+2m\sin^2\theta\right)R^2\dot{\varphi}^2$$

$$+ mgR\cos\theta + \frac{kR^2}{2}\sin^2\theta + qER\sin\varphi .$$

Se esprimiamo $\mathcal{L} = T - U$, dove $T(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ è quadratico nelle velocità generalizzate e $U = U(\theta, \varphi)$ è la nuova espressione dell'energia potenziale in funzione delle sole coordinate libere, i p.ti di equilibrio sono dati dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mgR\sin\theta - kR^2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -qER\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla 2ª eq. segue ovviamente che

$$\varphi = \pm \pi/2\,,$$

mentre dalla prima si ha

$$mgR\sin\theta - kR^2\sin\theta\cos\theta =$$

$$= kR^2\sin\theta\left(\frac{mg}{kR} - \cos\theta\right) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sin\theta = 0 \qquad\qquad \cos\theta = \frac{mg}{kR}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\theta = 0\,,\,\pi \qquad\qquad \theta = \pm\beta\,,\ \text{con } \beta = \arccos\left(\frac{mg}{kR}\right)$$

che $\exists$ sse $\frac{mg}{kR} \leq 1$.

Riassumendo, le soluzioni di equilibrio si hanno per

$$(\theta,\varphi) = \left\{\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,-\frac{\pi}{2}\right),\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\left(\pm\beta,\pi/2\right),\left(\pm\beta,-\pi/2\right)\right\}.$$

dove le ultime 2 coppie esistono purché $\frac{mg}{kR} \leq 1$.

Per poter affrontare la discussione riguardante la stabilità, è conveniente cominciare a determinare

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} mgR\cos\vartheta - kR^2(2\cos^2\vartheta - 1) & 0 \\ 0 & qER\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

- Caso $(\vartheta, \varphi) = (0, \pi/2)$

$$\text{Hess}\, U(\vartheta, \varphi)\Big|_{\substack{\vartheta=0 \\ \varphi=\pi/2}} = \begin{pmatrix} mgR - kR^2 & 0 \\ 0 & qER \end{pmatrix}$$

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} > 1$

2 autoval. positivi $\Rightarrow$ p.to di eq. STABILE

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ è necessario un SUPPLEMENTO di INDAGINE

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$

1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

- Caso $(\theta, \varphi) = (0, -\pi/2)$

$$\text{Hess}\, U(\theta, \varphi)\Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=-\pi/2}} = \begin{pmatrix} mgR - kR^2 & 0 \\ 0 & -qER \end{pmatrix}$$

almeno 1 autoval. è negativo

$\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE

– Caso $(\vartheta, \varphi) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\mathrm{Hess}\, U(\vartheta, \varphi)\Big|_{\substack{\vartheta=\pi \\ \varphi=\pi/2}} = \begin{pmatrix} -mgR-kR^2 & 0 \\ 0 & qER \end{pmatrix}$$

1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE

– Caso $(\vartheta, \varphi) = (\pi, -\pi/2)$

$$\mathrm{Hess}\, U(\vartheta, \varphi)\Big|_{\substack{\vartheta=\pi \\ \varphi=-\pi/2}} = \begin{pmatrix} -mgR-kR^2 & 0 \\ 0 & -qER \end{pmatrix}$$

2 autoval. neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE.

– Casi $(\vartheta, \varphi) = (\pm\beta, \pi/2)$

$$\mathrm{Hess}\, U(\vartheta, \varphi)\Big|_{\substack{\vartheta=\pm\beta \\ \varphi=\pi/2}} = \begin{pmatrix} mg\cancel{R}\frac{mg}{k\cancel{R}} - 2k\cancel{R^2}\frac{m^2g^2}{k^2\cancel{R^2}} + kR^2 & 0 \\ 0 & qER \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kR^2 - \frac{m^2 g^2}{k} & 0 \\ 0 & qER \end{pmatrix}$$

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$

2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equil. STABILI

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ è necessario un SUPPLEMENTO di INDAGINE

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} > 1$

non è da studiare perché in queste condizioni quei p.ti di equilibrio $\nexists$.

- Caso $(\theta, \varphi) = \left(\pm\beta, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=-\pi/2}} = \begin{pmatrix} kR^2\left(1 - \frac{m^2 g^2}{k^2R^2}\right) & 0 \\ 0 & -qER \end{pmatrix}$$

1 autoval. è sicuramente negativo

$\Rightarrow$ p.ti di equilibrio INSTABILI.

Passiamo ora a indagare i vari sottocasi che richiedono un ulteriore approfondimento.

Essi sono: $(0, \pi/2)$ e $(\pm\beta, \pi/2)$,

quando $\frac{mg}{kR} = 1 \Rightarrow \beta = \arccos(1) = 0$,

quindi in realtà questi 3 sottocasi coincidono.
Notiamo che l'energia potenziale è separabile in due contributi, cioè

$$U(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta) + g(\varphi),$$

dove $f(\vartheta) = -kR^2\left(\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right)$

e $g(\varphi) = -qER\sin\varphi$ sono entrambe funzioni di una sola delle due coordinate lagrangiane.

$\varphi = \pi/2$ è evidentemente il p.to di minimo assoluto per la funzione g.

Calcoliamo $f'(\vartheta) = kR^2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta)$

Siccome il fattore $1-\cos\vartheta \geq 0$ sempre con

La sola eccezione di $\theta = 0$, per cui $1-\cos\theta = 0$ e il primo fattore $\sin\theta$ si annulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, allora l'andamento di $f(\theta)$ è determinato solamente dal segno di $\sin\theta$, quindi

$f(\theta)$ è crescente per $\theta \in [0, \pi]$, mentre è decrescente per $\theta \in [-\pi, 0]$.

Ne segue che $\theta = 0$ è p.to di minimo assoluto per $f(\theta)$ e quindi $(\theta, \varphi) = (0, \pi/2)$ è p.to di minimo assoluto per $U(\theta, \varphi)$ e quindi è STABILE per il th. di Lagrange-Dirichlet.

— ∘ —

(3A) Si rimuova il vincolo introdotto al punto (2) e si consideri il sistema soggetto a un ulteriore vincolo in modo t.c. la velocità angolare dell'asta sia costantemente uguale a Ω. Si studi il caso in cui gli effetti gravitazionali e del campo elettrostatico sono trascurabili, cioè si pongono $\mathcal{E}=0$, $g=0$. Si scrivano la Hamiltoniana e le eq. di Hamilton.

Dobbiamo quindi imporre $\dot{\varphi}=\Omega$, la Lagrangiana quindi diventa

$$L(\vartheta, \varphi, \xi, \dot\vartheta, \dot\varphi = \Omega, \dot\xi) = \frac{1}{2} m R^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} m \dot\xi^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 \left(R^2 \sin^2\vartheta + \xi^2 \right) - \frac{1}{2} k \xi^2 + k R \xi \sin\vartheta ,$$

dove è stata omessa un'inessenziale costante additiva.

La corrispondente Hamiltoniana (a due gradi di libertà) si scrive come segue:

$$H(p_\vartheta, p_\xi, \vartheta, \xi) = p_\vartheta \cdot \dot\vartheta + p_\xi \cdot \dot\xi - L(\vartheta, \xi, \dot\vartheta, \dot\xi) \Big|_{\substack{\dot\vartheta = \dot\vartheta(p_\vartheta) \\ \dot\varphi = \dot\varphi(p_\varphi)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_\vartheta^2}{m R^2} + \frac{1}{2} \frac{p_\xi^2}{m} - \frac{1}{2} m \Omega^2 \left(R^2 \sin^2\vartheta + \xi^2 \right) + \frac{1}{2} k \xi^2 - k R \xi \sin\vartheta ,$$

dove abbiamo utilizzato (e invertito) le relazioni che definiscono p_ϑ e p_ξ, cioè

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = m R^2 \dot\vartheta , \quad p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot\xi} = m \dot\xi .$$

Le eq. di Hamilton sono quindi

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2 \sin\theta\cos\theta + kR\xi\cos\theta \\ \dot{p}_\xi = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi} = \left(m\Omega^2 - k\right)\xi + kR\sin\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{\xi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\xi} = \dfrac{p_\xi}{m} \end{cases}$$

(3B) Si verifichi che per qualche valore di Ω esistono delle soluzioni tali che il moto di P lungo la guida rettilinea è uniformemente accelerato. Si determinino tutti questi valori di Ω.

Dalla seconda e dalla quarta eq. di Hamilton si ha che

$$m\ddot{\xi} = (m\Omega^2 - k)\xi + kR\sin\vartheta\,,$$

affinché $\dot{\xi}$ sia costante deve succedere che

$$m\Omega^2 - k = 0 \quad e \quad \vartheta(t) = \vartheta_0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Immettendo questa informazione nell'eq. del moto che si ricavano dalle 1ª e 3ª eq. di Ham.

$$\Rightarrow 0 = mR^2\ddot{\vartheta} = (mR^2\Omega^2\sin\vartheta + kR\xi)\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = 0 \quad ($$il 1° fattore non

può annullarsi $\forall t$ se
il moto di ξ è unif. accel.).
$\Rightarrow \theta(t) = \pm \pi/2$.

Riassumendo, se $\Omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$, ci
sono soluzioni del tipo
$$\theta(t) = \pm \pi/2, \quad \xi(t) = \pm \frac{k}{m} t^2 + \dot{\xi}_0 \cdot t + \xi_0 .$$

(3C) Si determinino i valori
di Ω per cui esistono dei moti
periodici tali per cui Q è inizialmente in quiete in corrispondenza
all'origine e il suo periodo di oscillazione lungo la guida rettilinea

è il doppio di quello di rotazione di P, che sta in quiete rispetto all'asta.

Siccome P sta in quiete rispetto all'asta, allora abbiamo (nuovamente) che $\theta(t) = \theta_0 \Rightarrow \theta(t) = \pm\pi/2$.

L'equazione che descrive il moto di Q sulla guida rettilinea diventa

$$m\ddot{\xi} = -\left(k - m\Omega^2\right)\xi \pm kR$$

che è l'equazione del moto di un oscillatore armonico pesante, quando

$$k > m\Omega^2.$$

La relazione sui periodi può essere riformulata come segue:

$$T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k - m\Omega^2}{m}}} = 2T_{asta} = \frac{4\pi}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \frac{|\Omega|}{2} \Rightarrow \frac{k}{m} = \Omega^2\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega = \pm\sqrt{\frac{4}{5}\frac{k}{m}}.$$