Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
25 Giugno 2020

Un sistema meccanico è costituito da un'asta e da due punti materiali P e Q che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. L'asta è perfettamente rigida, di spessore infinitesimo, di massa M , di lunghezza $2R$ e di densità di massa omogenea al suo interno; siano A e B i suoi vertici; inoltre, essa è vincolata in modo tale che può solo ruotare attorno al suo baricentro, posto in corrispondenza all'origine, mantenendosi sempre all'interno del piano orizzontale Oxy . Il punto materiale P è di massa m ed è vincolato in modo che può muoversi sulla circonferenza di raggio R e centro O che giace nel piano perpendicolare all'asta (quindi tale piano è verticale e può ruotare attorno all'asse z). Una guida rettilinea di lunghezza infinita e massa trascurabile è appoggiata sull'asta in modo che giaccia nel piano Oxy rimanendo sempre in posizione ortogonale al segmento di vertici A e B (ne consegue che la proiezione del punto P sul piano Oxy stesso ricade all'interno della guida orizzontale). Il punto materiale Q , di massa m , è libero di muoversi sulla guida rettilinea. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro i punti P e Q . Il vertice A è dotato di una carica elettrica q , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse x .

Si intende che tutti i parametri del problema, ovvero m , g , M , R , k , q e $\mathcal{E}$, abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che i punti P e Q si possono attraversare senza scontrarsi tra loro e/o con l'asta. Si risponda alle domande seguenti.

Suggerimento. Al fine di poter scrivere agevolmente l'energia cinetica, si osservi che la giacitura dell'asta è univocamente determinata una volta nota la, cosiddetta, longitudine (facente parte delle coordinate sferiche) del punto P .

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.
- (2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a un ulteriore vincolo ideale, realizzato in modo tale che il punto Q stia sempre in coincidenza alla suddetta proiezione del punto P sul piano Oxy (in altri termini, la molla che li congiunge è sempre in verticale). Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e si studi la loro stabilità, al variare di tutti i parametri.

- (3) Si rimuova ora il vincolo descritto al punto (2). Si introduca invece un nuovo vincolo ideale, realizzato in modo tale che la velocità angolare dell'asta sia costantemente uguale a Ω . Inoltre, si trascurino gli effetti del campo gravitazionale e di quello elettrico (cioè si ponga $g = 0$ e $\mathcal{E} = 0$).
- (3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton^[*] che descrivono quest'ultimo sistema meccanico, il quale, con l'introduzione del suddetto nuovo vincolo, è ora a due gradi di libertà.
- (3B) Si verifichi che per qualche valore della velocità angolare Ω esistono moti uniformemente accelerati del punto Q rispetto alla guida rettilinea. Si determinino tali valori di Ω e le soluzioni delle equazioni di Hamilton che sono corrispondenti ai suddetti moti accelerati.
- (3C) Si determinino ora i valori della velocità angolare Ω per cui esistono dei moti periodici tali che il periodo di oscillazione del punto Q lungo la guida rettilinea è esattamente uguale al doppio del tempo impiegato dal punto P , *in quiete rispetto all'asta*, per completare una rotazione di 360 gradi attorno all'asse z .

[*] Di fatto, le equazioni del moto risultanti sono relative al riferimento *non inerziale* che è solidale con il piano normale all'asta e passante per l'origine.