

I Esame FMI

18 aprile 2018

P
A
G.
1

$$\ddot{x} = -\frac{dU_a}{dx} - \lambda \dot{x}, \text{ dove } U_a(x) = \frac{1}{a+x^2} + \frac{1}{16}(x^2+1)^2$$

con $a > 0$

- (1) Nel caso $\lambda = 0$, caratterizzare tutte le cond. iniz. cui fanno seguito delle leggi del moto o moto asintotico.

Procediamo con lo studio del potenziale. Dalla definizione di U_a (siccome a è positivo) è evidente che $U_a(x) > 0 \Rightarrow$ ~~2~~ intersezioni con l'asse delle ascisse. Inoltre, è evidente che $U_a(-x) = U_a(x)$, cioè il potenziale è pari.

$$U'_a(x) = -\frac{2x}{(a+x^2)^2} + \frac{1}{4}(x^2+1)x = \frac{1}{4} \frac{x}{(a+x^2)^2} [(x^2+1)(a+x^2)^2 - 8]$$

Abbiamo quindi che $x=0$ è sicuramente un punto stazionario.

Definiamo $f_a(x) := (x^2+1)(a+x^2)^2$; siccome,
 $f'_a(x) = 2x(a+x^2)^2 + 4(x^2+1)(a+x^2)x = 2x(a+x^2)[(a+x^2)+2(x^2+1)]$
 $\Rightarrow f'_a(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'_a(x) < 0$ se $x < 0$.

Di conseguenza, $f_a(x)$ ha ^{P.to di} un minimo assoluto
in $x=0$, quindi ~~il~~ il valore minimo di f_a è
 $f_a(0) = a^2$

Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = +\infty$, abbiamo che

- Se $a^2 < \delta$, $f_a(x) = \delta$ ammette 2 e 2 sole soluzioni,
che chiamiamo $x_{m,\pm}$, t.c.
 $x_{m,-} = -x_{m,+}$.

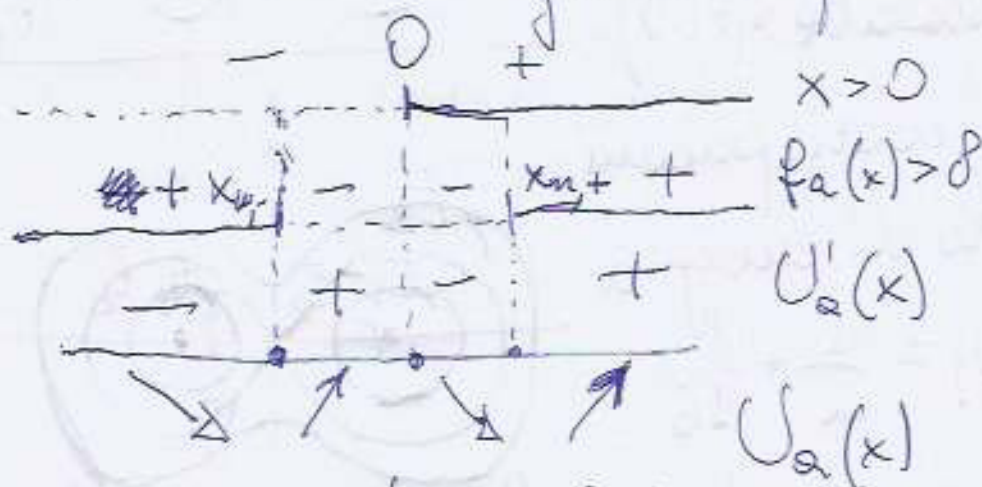
- Se $a^2 = \delta$, $f_a(x) = \delta$ ha l'origine come unica
soluzione (con molteplicità
doppia).

- Se $a^2 > \delta$, $f_a(x) = \delta$ non ammette soluzioni.

Torniamo allo studio del potenziale.
Tenendo conto del fatto che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_a(x) = +\infty$,
possiamo immediatamente concludere che

- Quando $\alpha \geq 2\sqrt{2}$, allora $U_\alpha(x)$ è crescente per $x > 0$ ed è decrescente per $x < 0$.

- Nel caso $0 < \alpha < 2\sqrt{2}$, è utile lo studio del segno della derivata del potenziale



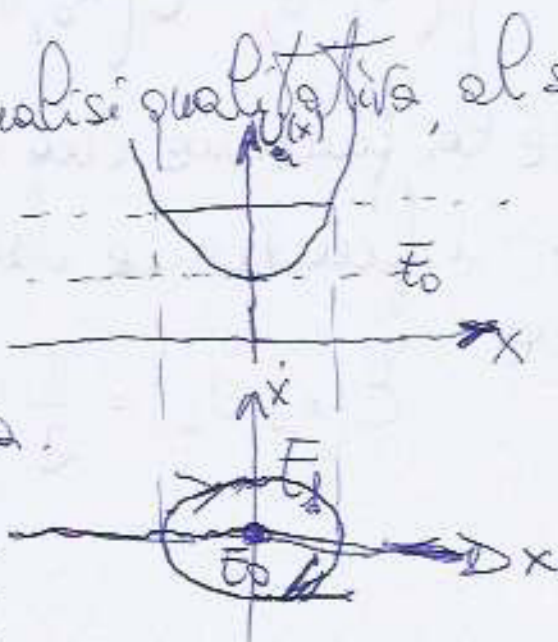
Possiamo quindi concludere che $x_{m,\pm}$ sono p.t. di minimo assoluto, 0 è p.to di massimo relativo.

Limitiamo al minimo l'analisi qualitativa, al solo scopo di dare la risposta.

Nel caso $\alpha \geq 2\sqrt{2}$,

il moto è a meta asintotica.

Attenzione! Decidiamo, per semplicità e chiarezza, di



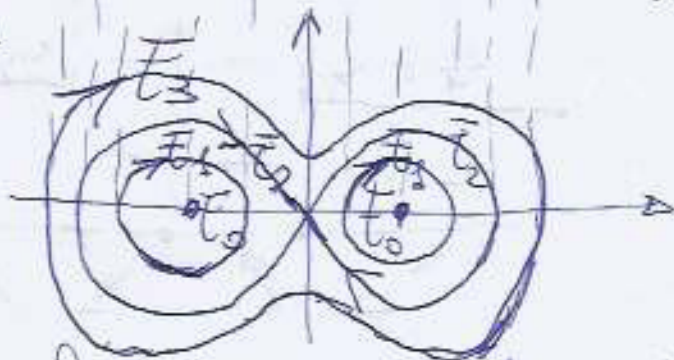
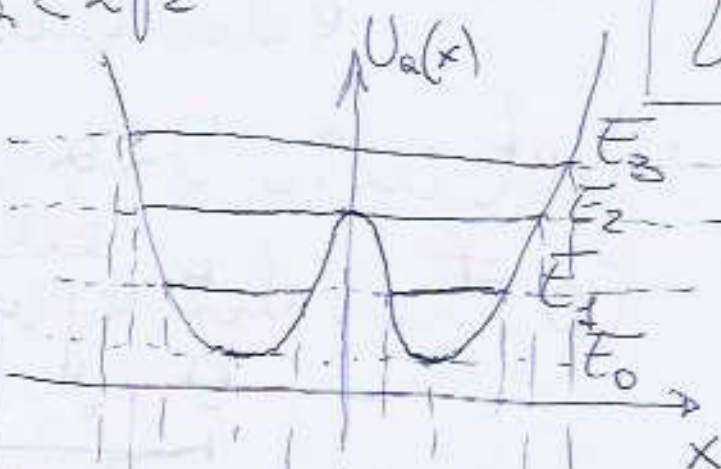
NON considerare le soluzioni di equilibrio tra i moti a moto asintotico.

Nel caso $0 < a < 2\sqrt{2}$

I moti a moto asintotico (verso il p.to di equilibrio instabile $x(t)=0$)

sono quelli corrispondenti al livello di energia

$$E_2 = U_a(0) = \frac{1}{a} + \frac{1}{16}$$



le condizioni iniziali cui fanno seguito dei moti ~~che~~ a moto asintotico appartengono all'insieme

$$\left\{ (x_0, v_0) : E(x_0, v_0) = \frac{1}{a} + \frac{1}{16} \right\} \setminus \{(0, 0)\}$$

dove la funzione che determina il valore dell'energia in funzione dei dati iniziali, altro non è che

$$E(x_0, v_0) = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{a + x_0^2} + \frac{1}{16} (x_0^2 + 1)^2$$

(2) Siano ora $\lambda=0$ e $\alpha=1$. Sda T
il periodo della legge del moto che fa
seguito alle condizioni iniziali $x(0)=\sqrt{\frac{5}{4}}$, $\dot{x}(0)=0$.
Siano determinino delle stime T_- e T_+ t.c.
 $T_- \leq T \leq T_+$ e $\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} < 50\%$.

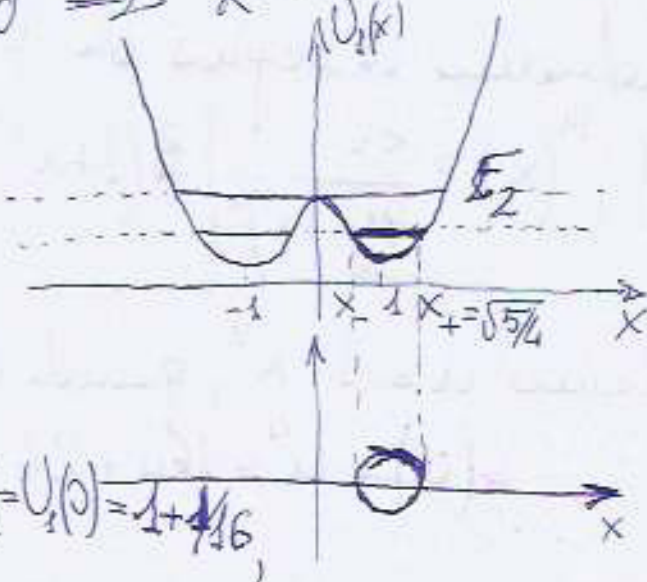
Facendo riferimento all'analisi qualitativa del
moto discusso al punto (1) nel caso $\alpha < 2\sqrt{2}$,
si può verificare facilmente che il moto è periodico.
Osserviamo innanzitutto che

$$U_1'(x) = \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} \left[(x^2+1)(1+x^2)^2 - 8 \right],$$

quindi i p.ti stazionari (che non sono nell'origine) risol-
vono l'equazione $(x^2+1)^3 = 8 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Siccome

$$\begin{aligned} E\left(\sqrt{\frac{5}{4}}, 0\right) &= U_1\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right) = \\ &= \frac{1}{1+\frac{5}{4}} + \frac{1}{16} \left(\frac{5}{4}+1\right)^2 = \\ &= \frac{4}{9} + \frac{81}{256} \approx 0.761 < E_2 = U_1(0) = 1 + \frac{1}{16}, \end{aligned}$$



allora il moto è periodico (vedi punto (1)),
con oscillazioni complete tra due estremi
 $x_- \in (0,1)$ e $x_+ > 1$. Siccome $\dot{x}(0) = 0$ e $x(0) > 1$,
allora

$$x_+ = x(0) = \sqrt{5/4}.$$

Per poter stimare il periodo è conveniente
calcolare la derivata seconda e studiare il
comportamento.

$$U_1''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4}(x^2+1) + \frac{1}{2}x^2$$

$$= -\frac{8}{(1+x^2)^3} + \frac{6}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2.$$

$$\Rightarrow U_1'''(x) = +\frac{48x}{(1+x^2)^4} - \frac{24x}{(1+x^2)^3} + \frac{3}{2}x.$$

Studiamo il segno di U_1''' :

$$U_1'''(x) = \frac{3x}{2(1+x^2)^4} \left[(1+x^2)^4 - 16(1+x^2) + 24 \right]$$

Poniamo $u = 1+x^2$, quindi $u \in [1, +\infty)$ e studiamo $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
t.c. $g(u) = u^4 - 16u + 24$.

$$g'(u) = 3u^3 - 16 = 0 \Rightarrow u = \left(\frac{16}{3}\right)^{1/3}, \text{ che}$$

P
A
G.
7

è evidentemente
punto di minimo
perché $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(u) = +\infty$.

$$\forall u \in \mathbb{R}, g(u) \geq g\left(\left(\frac{16}{3}\right)^{1/3}\right) = \left(\frac{16}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{16}{3} - 16\right) + 24$$

$$= -2 \left(\frac{16}{3}\right)^{4/3} + 24 \approx 5.36 > 0.$$

Siccome $U_1'''(x) = \frac{3}{2} x \left[\frac{g(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \right]$ e la frazione
in parentesi quadra è t.c. sia il numeratore che il deno-
minatore sono sempre positivi, allora

$$U_1'''(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Ne segue che la derivata seconda $U_1''(x)$ è sicura-
mente crescente $\Rightarrow$ destra dell'asse delle ordinate.

Questa osservazione ci consente di scrivere

$$\frac{2\pi}{\sqrt{U_1''(x_+)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\max_{x \in [x_-, x_+]} U_1''(x)}} \leq T \leq 2\pi \sqrt{\frac{m}{\min_{x \in [x_-, x_+]} U_1''(x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{U_1''(x_-)}}$$

Bisognerebbe determinare quindi x_- t.c.

$$U_1(x_-) = U_1(x_+) = U_1\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right), \text{ e } x_- \in (0, 1).$$

Questo richiederebbe di risolvere un'eq. bi-cubica abbastanza impegnativa.

P
A
G.
8

Cerchiamo una via alternativa che richieda meno conti. Osservo che, siccome U_1 è decrescente ⁱⁿ $[0, 1]$, se individuiamo

$$x^* \text{ t.c. } x^* \in (0, 1) \text{ e } U_1(x^*) > U_1(x_-) = U_1\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right),$$

allora x^* è sicuramente alla sinistra di x_- , quindi
 $[x^*, x_+] \supseteq [x^*, x_+] \Rightarrow \min_{x \in [x^*, x_+]} U''(x) \leq \min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x).$

Inoltre, siccome U'' è crescente per $x > 0$, allora

$$U''(x^*) = \min_{x \in [x^*, x_+]} U''(x) \leq \min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x) = U''(x_-).$$

Cerchiamo quindi un valore x^* per cui $U(x^*) > U(x_-)$, ma, possibilmente, "non troppo maggiore", allo scopo di non allargare troppo l'intervallo su cui cerchiamo $\min U''$; ovviamente, quest'ultima richiesta è per non peggiorare troppo le stime.

Siccome $U_1(x)$ NON è simmetrico rispetto al p.to di minimo $x=1$ ma è vicino è quasi simmetrico, allora proviamo x^* che è t.c. ~~1~~ $1-x^* > x_+-1$, ma anche $1-x^* \approx x_+-1$.

Proviamo con

$$x^* = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

(meglio usare un numero sotto
radice perché in U_1 la x è
sempre elevata al quadrato)

P
A
G
9

e otteniamo

$$U_1\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} + \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4} + 1\right)^2 = \frac{4}{7} + \frac{49}{256} \approx 0.763$$

$$\Rightarrow U_1\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) > U_1(x_{\pm}) = U_1\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Possiamo assumere } x^* = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow T_+ = \frac{2\pi}{\sqrt{U_1''(x^*)}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{\min_{x \in [x_-, x_+]} U''(x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x_-)}}$$

$$\Rightarrow T_+ = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{-8}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^3} + \frac{6}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{-8 \cdot 64}{7^3} + \frac{6 \cdot 16}{49} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}}}$$

$$\approx \frac{2\pi}{\sqrt{1.279}} \approx 2\pi \cdot 0.884 \approx 5.56$$

$$\text{Invece, abbiamo } T_- = \frac{2\pi}{\sqrt{U_1''(x_+)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{-8}{\left(1+\frac{5}{4}\right)^3} + \frac{6}{\left(1+\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_- = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{-8 \cdot 64}{9^3} + \frac{6 \cdot 16}{81} + \frac{1}{4} + \frac{89}{144} \cdot \frac{3}{4}}}$$

$$T_- \approx \frac{2\pi}{\sqrt{2.42}} \approx \frac{2\pi}{0.643} \approx 4.04$$

P
A
G.
10

$$\Rightarrow \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \approx \frac{5.56 - 4.04}{5.56 + 4.04} \approx 0.16,$$

Cioè la stima è inferiore al 50% di errore relativo, così come richiesto.

(3) Sia ora $a = 1/b$ e $\lambda > 0$.

Si consideri il moto che fa seguito alle condizioni iniziali $x(0) = x_0 = 2(b)^{1/4}$, $\dot{x}(0) = v_0 = 0$.

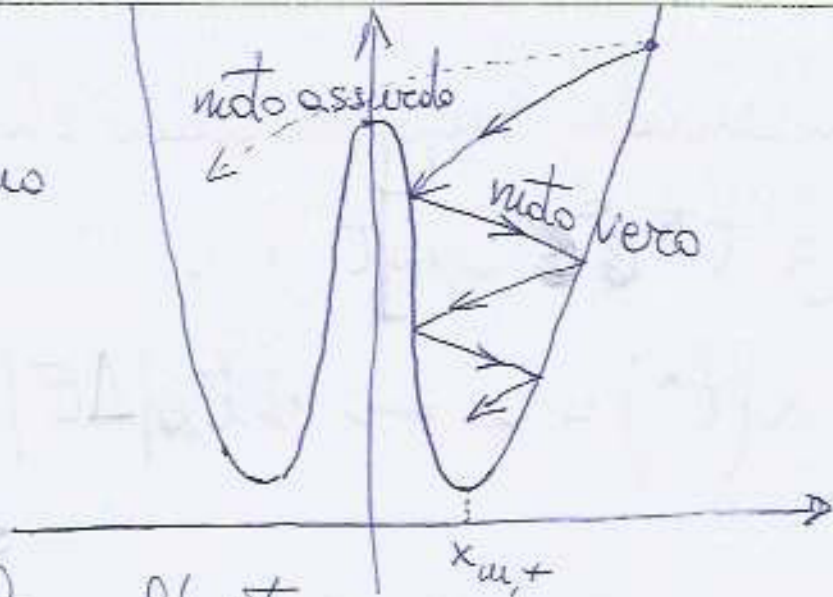
Si dimostra che per valori di b sufficientemente grandi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, 0) = x_{m,+},$$

dove $x_{m,+}$ è il p.to di minimo di $U_{1/b}$ che sta a destra dell'asse delle ascisse.

Ovviamente, per b grande abbastanza avremo che $a = 1/b \in (0, 2\sqrt{2})$. La situazione è quindi riassunta dal grafico seguente (lo studio del potenziale è preso dal punto (1)).

Con la linea
continua abbiamo
indicato il moto
vero nel senso
che è quello
di cui ci viene
richiesto di verificare l'esistenza.



P
A
G.
11

Osserviamo che

$$\begin{aligned} E(x_0, v_0) &= U_{\frac{1}{b}}(x_0) = U_{\frac{1}{b}}(2(b)^{1/4}) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{b} + 4b^{1/2}} + \frac{1}{16} \left(16b + 8b^{1/2} + \frac{1}{16} \right) \\ &= b + \frac{1}{2}\sqrt{b} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4b^{1/2} + \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

e che $U_{\frac{1}{b}}(0) = b + \frac{1}{16}$.

Di conseguenza, l'energia iniziale è al di sopra
di quella che rappresenta la barriera di potenziale
(da scavalcare ~~nel~~ per poter andare nella buca di
sinistra) di una quantità

$$E(x_0, v_0) - U_{\frac{1}{b}}(0) = O(\sqrt{b}) \text{ per } b \rightarrow +\infty.$$

Per assurdo, supponiamo che

$$\exists t^* \in (0, +\infty) \text{ t.c.}$$

$$x(t^*) = 0 \Rightarrow |\Delta E| = E(x_0, \dot{x}_0) - E(x(t^*), \dot{x}(t^*)) \leq U_{1/b}(x_0) - U_{1/b}(0)$$

Per negare l'ipotesi di assurdo dobbiamo quindi minore l'energia dissipata in modo da mostrare che è maggiore della differenza di energia potenziale tra x_0 e 0.

A questo scopo, procediamo come al solito:

$$|\Delta E| = \lambda \int_0^{t^*} dt (\dot{x}(t))^2 = \lambda \int_0^{x_0} d\xi \sqrt{\frac{2}{m} (E(\xi, \dot{x}(\xi)) - U_{1/b}(\xi))}$$

abbiamo usato il fatto che $\dot{x} < 0$ in $(0, t^*)$.

$$\geq \lambda \int_0^{x_+} d\xi \sqrt{2(U_{1/b}(0) - U_{1/b}(\xi))}; \text{ dove } x_+ > 0 \text{ t.c.}$$

Osserviamo che

$$U_{1/b}(1) = \frac{1}{1/b+1} + \frac{1}{16} (1+1)^2 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \frac{5}{4}$$

$$U_{1/b}(x_+) = U_{1/b}(0)$$

$$U_{1/b}(b^{1/4}) = \frac{1}{1/b+\sqrt{b}} + \frac{1}{16} (\sqrt{b}+1) \sim \frac{\sqrt{b}}{16} \text{ per } b \rightarrow +\infty$$

Di conseguenza, abbiamo che $U_{1/b}(1) < U_{1/b}(b^{1/4}) < U_{1/b}(0) < U_{1/b}(2b^{1/4})$, per b grande abbastanza.
Da quanto sappiamo del comportamento delle funzione $U_{1/b}$ è evidente che

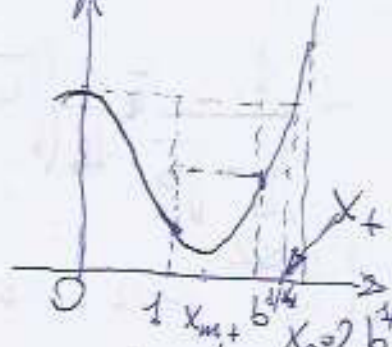
$$U_{1/b}(x) \leq U_{1/b}(b^{1/4}) \quad \forall x \in [1, b^{1/4}]$$

P
A
G.

13

Infatti, siccome $U_{1/b}(0) > U_{1/b}(1)$ (ci sarà un punto $\alpha \in (0, 1)$ t.c. $U'_{1/b}(\alpha) < 0$) e $U_{1/b}(1) < U_{1/b}(b^{1/4})$ (ci sarà un p.to $\beta \in (1, b^{1/4})$ con deriv. pos.), allora l'unico p.to di minimo sarà compreso tra 0 e $b^{1/4}$ quindi si è nella situazione (1) che nella (2)

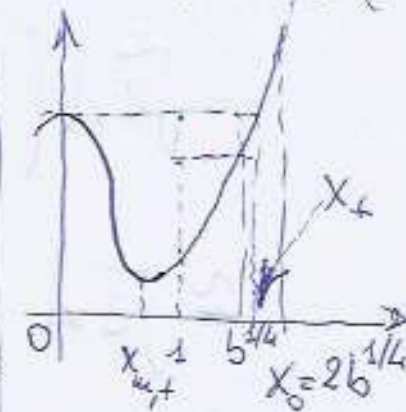
situazione (1)



P.to di minimo
 x_{m+} a dx. di 1

In verità è questo ciò che succede basta controllare che $\lim_{b \rightarrow +\infty} U_{1/b}(1) < 0$.

situazione (2)



P.to di minimo
 x_{m+} a sin. di 1

In ogni caso, è chiaramente verificato ciò che volevamo ovvero

$$U_{1/b}(x) \leq U_{1/b}(b^{1/4}) \quad \forall x \in [1, b^{1/4}]$$

$$\Rightarrow U_{1/b}(x_0) - U_{1/b}(\xi) = U_{1/b}(2b^{1/4}) - U_{1/b}(\xi) \geq U_{1/b}(2b^{1/4}) - U_{1/b}(b^{1/4}) \quad \forall x \in [1, b^{1/4}]$$

Sfruttiamo l'ultima disuguaglianza che abbiamo scritto, per effettuare la minorazione dell'energia dissipata:

P
A
G.
14

$$|\Delta E| \geq \lambda \int_0^{x_1} d\xi \sqrt{2(U_{1/6}(0) - U_{1/6}(\xi))}$$

$$> \lambda \int_{a_1}^{b^{1/4}} d\xi \sqrt{2(U_{1/6}(0) - U_{1/6}(b^{1/4}))}$$

$$= \sqrt{2} \lambda (b^{1/4} - 1) \left(b + \frac{1}{16} - \frac{1}{\frac{1}{b} + \sqrt{b}} - \frac{1}{16} (\sqrt{b} + 1) \right)^{1/2}$$

$$\approx \sqrt{2} \lambda b^{1/4} \cdot b^{1/2} = \sqrt{2} \lambda b^{3/4} \text{ per } b \rightarrow +\infty$$

Siccome $E(x_0, v_0) - U_{1/6}(0) = U_{1/6}(2b^{1/4}) - U_{1/6}(0) \sim \frac{1}{2} b^{1/2}$ per $b \rightarrow +\infty$, abbiamo dimostrato che $\exists b$ abbastanza grande t.c.

$$|\Delta E| \geq O(b^{3/4}) > E(x_0, v_0) - U_{1/6}(0) = O(b^{1/2}),$$

cosa che è in contrasto con l'ipotesi di assurdo!

Di conseguenza, abbiamo quindi verificato che $\exists \bar{t} > 0$, t.c. $E(x(\bar{t}), v(\bar{t})) < U_{1/6}(0) \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_{u,+}$