I prova di esonero di Fisica Matematica 1
Corso di laurea in Matematica
18 Aprile 2018

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}\, U_a}{\mathrm{d}\, x} - \lambda \dot{x} \ ,$$

dove $\lambda \geq 0$ è il coefficiente di attrito e l'energia potenziale $U_a(x)$ è definita da:

$$U_a(x) = \frac{1}{a + x^2} + \frac{1}{16}\left(x^2+1\right)^2$$

per un fissato valore del parametro $a \in \mathbf{R}^+$.

(1) Si studi il caso conservativo ($\lambda = 0$). Al variare del parametro a, si determini l'insieme di tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:

$$\big(x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0\big) \ ,$$

cui fanno seguito delle leggi del moto a meta asintotica.

(2) Limitatamente al caso con $\lambda = 0$ e $a = 1$, si verifichi (rapidamente) che il moto con condizione iniziale

$$\big(x(0) = \sqrt{5/4}\,,\ \dot{x}(0) = 0\big)$$

è periodico. Inoltre, si dia una stima del periodo T di quel moto, determinando *esplicitamente* due numeri reali positivi T_- e T_+ tali che $T_- \leq T \leq T_+$ con un errore relativo sulla stima, calcolato utilizzando la formula $(T_+ - T_-)/(T_+ + T_-)$, che sia inferiore al 50%.

(3) Si consideri ora il caso dissipativo dell'equazione differenziale di meccanica unidimensionale che è stata scritta all'inizio del testo, con un generico coefficiente di attrito $\lambda > 0$.
Si ponga ora $a = 1/b$ e si studi il moto che fa seguito alle condizioni iniziali

$$\big(x(0) = x_0 = 2(b)^{1/4}\,,\ \dot{x}(0) = 0\big) \ .$$

Si dimostri che, per valori di b sufficientemente grandi,

$$\lim_{t\to\infty} x\big(t;\, x_0\,,\, 0\big) = x_{m\,,+} \ ,$$

dove $x_{m\,,+} > 0$ è punto di minimo del potenziale $U_{1/b}(x)$.
Si noti che *non è richiesto* il (non semplice) calcolo esplicito del valore di $x_{m\,,+}$ in funzione del parametro b.