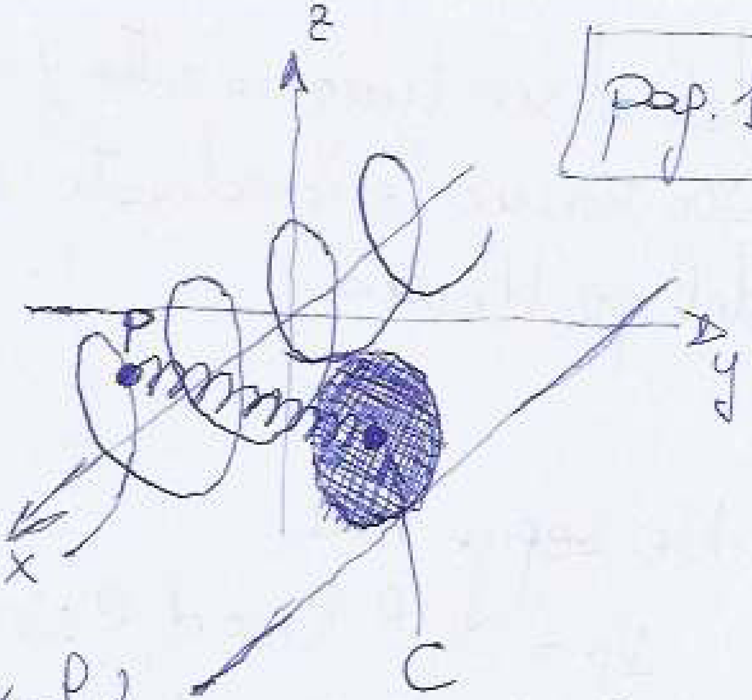
II esonero FM1

Giugno 2018



massa P = m

massa disco = M

Raggio " = R

P vincolato a muoversi sulla curva di eq. $\begin{cases} x = l\alpha \\ y = R\sin\alpha \\ z = -R\cos\alpha \end{cases}$, dove l e R sono lunghezze.

Guida rettilinea su retta di equazioni

$$y = \eta \,, \quad z = -R$$

Guida rettilinea di massa trascurabile (i cui punti possono traslare parallelamente all'asse y).

Disco rotola senza strisciare lungo la guida.

Costante molla elastica tra P e C = k.

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Adottiamo come coordinate libere, o lagrangiane, quelle della terna (α, x, η), dove α, η sono definite nel testo e x è l'ascissa di C e del punto di contatto

del disco lungo la retta $y=\eta$, $z=-R$.
Scriviamo le coordinate di alcuni p.ti notevoli del problema:

$$P:\ (\ell\alpha,\ R\sin\alpha,\ -R\cos\alpha)$$

$$C:\ (x,\eta,0).$$

Ne segue che

$$\underline{v}_P = \dot\alpha(\ell, R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,,\quad \underline{v}_C = (\dot x, \dot\eta, 0).$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2} m\, \underline{v}_P\cdot\underline{v}_P + \frac{1}{2} M\, \underline{v}_C\cdot\underline{v}_C + \frac{1}{2} I_D\,\omega^2,$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di König per scrivere l'energia cinetica del disco come la somma di due contributi, di cui il secondo (cioè $\frac{1}{2} I_D\omega^2$) tiene conto del moto del disco rispetto al suo baricentro e quindi è dovuto alla rotazione attorno al baricentro stesso. Infatti, I_D denota il momento di inerzia del disco rispetto a rotazioni attorno al centro del disco, con asse di rotazione perpendicolare al disco stesso, mentre ω è la velocità angolare di rotazione.
E' ben noto che $I_D = \frac{1}{2}MR^2$. Inoltre,

siccome il disco rotola senza strisciare, sussiste la relazione

$$\dot{x} = -R\omega \Rightarrow \omega = -\frac{\dot{x}}{R}.$$

In definitiva, il contributo dovuto alla rotazione del disco è

$$\frac{1}{2} I_D \omega^2 = \frac{1}{4} M \cancel{R^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{4} M \dot{x}^2 .$$

Possiamo ora esprimere tutta l'energia cinetica in funzione delle coordinate libere o lagrangiane:

$$T = \frac{1}{2} m \left(R^2 + \ell^2\right) \dot{\alpha}^2 + \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\eta}^2 .$$

Passiamo al calcolo dell'energia potenziale:

$$U = mg z_P + \frac{1}{2} k \overline{CP}^2 = -mgR\cos\alpha + \frac{1}{2} k (x - \ell\alpha)^2 + \frac{1}{2} k (\eta - R\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow U = -mgR\cos\alpha + \frac{1}{2} k (x - \ell\alpha)^2 + \frac{1}{2} k \eta^2 - kR\eta\sin\alpha ,$$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva $\frac{1}{2} k R^2$.

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m \left(R^2 + \ell^2\right) \dot{\alpha}^2 + \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\eta}^2 + mgR\cos\alpha - \frac{1}{2} k (x - \ell\alpha)^2 - \frac{1}{2} k \eta^2 + kR\eta\sin\alpha$$

e le equazioni di Lagrange, cioè

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\alpha} - \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = m(R^2+\ell^2)\ddot\alpha + mgR\sin\alpha + k\ell(\ell\alpha - x) - kR\eta\cos\alpha = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{3}{2}M\ddot x + k(x-\ell\alpha) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\eta} - \dfrac{\partial L}{\partial \eta} = M\ddot\eta + k(\eta - R\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$

---

(2) Si introduca ora un ulteriore vincolo, in modo t.c. la molla sia sempre in direzione parallela al piano Oyz.
Per questo nuovo sistema, si determinino i p.ti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri

---

La nuova condizione (associata all'ulteriore vincolo che abbiamo introdotto ora) equivale a imporre che

$$x_p = x_c \Longrightarrow x = \ell\alpha$$

La nuova lagrangiana sarà quindi

$$\mathcal{L}(\alpha,\eta,\dot\alpha,\dot\eta) = L(\alpha, \ell\alpha, \eta, \dot\alpha, \ell\dot\alpha, \dot\eta) = \frac{1}{2}m(R^2+\ell^2)\dot\alpha^2 + \frac{3}{4}M\ell^2 + \frac{1}{2}M\dot\eta^2 + mgR\cos\alpha - \frac{1}{2}k\eta^2 + kR\eta\sin\alpha$$

La nuova energia potenziale è data dai contributi che appaiono nella nuova Lagrangiana $\mathcal{L}$ e che <u>NON</u> sono quadratici nelle velocità <u>generalizzate</u>; essi vanno sommati con segno cambiato, cioè

$$U(\alpha, \eta) = -mgR\cos\alpha + \frac{1}{2}k\eta^2 - kR\eta\sin\alpha$$

Per determinare i p.ti di equilibrio, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = mgR\sin\alpha - kR\eta\cos\alpha = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = k(\eta - R\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda delle eq. di ~~Lagrange~~ questo sistema, segue che

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \implies \eta = R\sin\alpha .$$

Quest'ultima relazione, immessa nella prima eq. del sistema (cioè $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$) $\implies mgR\sin\alpha - kR^2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$$\implies kR^2\sin\alpha\left(\frac{mg}{kR} - \cos\alpha\right) = 0,$$

da cui seguono:

$\sin\alpha = 0$

$\implies \alpha = 0, \pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha = mg/(kR)$

$\implies \alpha = \pm\beta \; (+2k\pi)$ dove $\beta = \arccos\left(\frac{mg}{kR}\right)$

$\boxed{\exists \text{ sse } \frac{mg}{kR} \leq 1}$ $\Updownarrow$

Riepilogando la situazione, abbiamo un insieme numerabile di p.ti di equilibrio, ovvero

$$(\alpha,\eta) \in \{(2k\pi, 0), (\pi+2k\pi, 0), (\beta+2k\pi, R\sin\beta), (-\beta+2k\pi, -R\sin\beta) ; \forall k \in \mathbb{Z}\},$$

dove ricordiamo che l'ultima coppia di soluzioni di equilibrio $\exists$ solo se $\frac{mg}{kR} \leq 1$.

Per discutere la stabilità dei suddetti p.ti di equilibrio, calcoliamo

$$\mathrm{Hess}\, U = \begin{pmatrix} mgR\cos\alpha + kR\eta\sin\alpha & -kR\cos\alpha \\ -kR\cos\alpha & k \end{pmatrix}$$

– Caso $(2k\pi, 0)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\alpha=2k\pi \\ \eta=0}} = \begin{pmatrix} mgR & -kR \\ -kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\alpha=2k\pi \\ \eta=0}} = kR^2\left(\frac{mg}{kR} - 1\right)$$

– Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ p.ti di equil. INSTABILI.

– Sottocaso $\frac{mg}{kR} > 1$

Siccome $\det > 0$ e $Tr > 0$ $\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equilibrio STABILI.

– Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

$\Rightarrow \det = 0$, $Tr > 0$ $\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ serve un supplemento di indagine.

– Caso $(\pi + 2k\pi, 0)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\alpha = \pi + 2k\pi \\ \eta = 0}} = \begin{pmatrix} -mgR & kR \\ kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\alpha = \pi + 2k\pi \\ \eta = 0}} = -mgkR - k^2R^2 < 0$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.ti di equil. INSTABILI.

– Casi $(\pm\beta + 2k\pi, \pm \sin\beta)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\alpha = \pm\beta + 2k\pi \\ \eta = \pm \sin\beta}} = \begin{pmatrix} mgR\cos\beta + kR^2(1-\cos^2\beta) & -kR\cos\beta \\ -kR\cos\beta & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\alpha = \pm\beta + 2k\pi \\ \eta = \pm \sin\beta}} = \Big(mg\cancel{kR}\frac{mg}{\cancel{kR}} + k^2R^2 - 2\cancel{k^2R^2}\frac{m^2g^2}{\cancel{k^2R^2}} = k^2R^2 - m^2g^2$$

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$

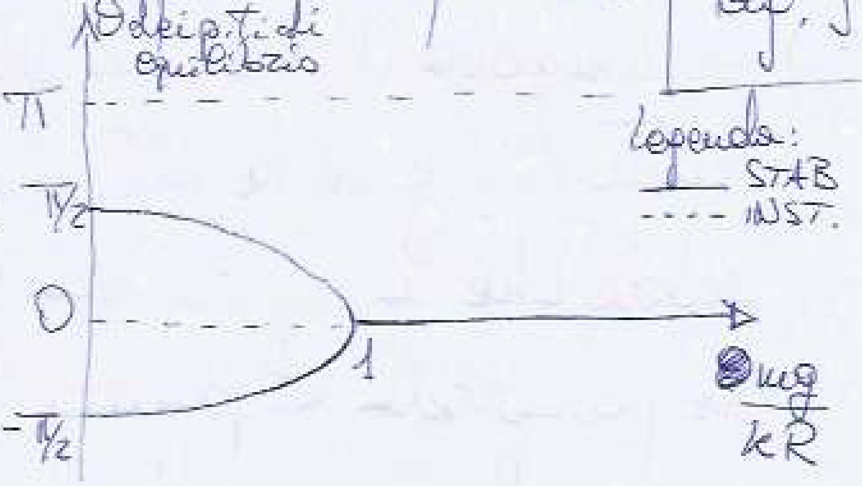
Siccome det > 0, allora la matrice è def. positiva oppure def. negativa. Siccome un elemento diagonale, cioè $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} > 0$, allora la matrice Hess $U\Big|_{\substack{\alpha=\pm\beta+2k\pi \\ \eta=\pm R\sin\beta}}$ non può che essere def. pos. $\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equilibrio STABILI.

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

$\Rightarrow$ det = 0, $T_r = mgR + k > 0$ $\Rightarrow$ Serve un supplemento di indagine.

Passiamo ora al supplemento di indagine, che ha lo scopo di determinare (o meno) la stabilità dei 3 insiemi di p.ti di equilibrio $(\alpha, \eta) = (2k\pi, 0), (\beta+2k\pi, R\sin\beta), (-\beta+2k\pi, -R\sin\beta)$.
Sfruttiamo l'evidente periodicità del potenziale rispetto ad α per limitare lo studio di $U: \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè consideriamo come dominio solo $[-\pi, \pi]\times\mathbb{R}$.
Osserviamo che, per il caso critico, cioè $\frac{mg}{kR} = 1$ $\Rightarrow \beta = 0$, quindi dobbiamo studiare solo il p.to $(0,0)$.

Il grafico riassuntivo dei p.ti di equilibrio evidenzia (qui a fianco) la classica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio stabile.



Questo ci porta a congetturare che, in corrispondenza al valore critico $\frac{mg}{kR} = 1$, $(0,0)$ sia un p.to di equilibrio stabile.

Per verificare rigorosamente questa congettura, osserviamo che

$$\lim_{|\eta| \to +\infty} \inf_{\vartheta \in \mathbb{T}^1} U(\vartheta, \eta) = +\infty .$$

Ne segue che il p.to di minimo assoluto deve essere al finito e, quindi, non può che essere un p.to stazionario. I p.ti stazionari sono $(0,0)$ e $(\pi, 0)$, ma quest'ultimo è un p.to di sella (si veda a pag. 7). Di conseguenza, il p.to di minimo assoluto non può che essere $(0,0)$, che è di equilibrio stabile per il th. di Lag.-Dirichlet.

Questa osservazione chiude la dimostrazione che i p.ti $(2k\pi, 0)$ sono di equilibrio stabile quando $\frac{mg}{kR} = 1$.

(3) Si rimuova il vincolo descritto al punto (2) e se ne introduca uno nuovo in modo che la molla ora stia sempre in direzione parallela al piano Oxz. Inoltre, si ponga $\ell = 0$, quindi il punto P si muove su una circonferenza di raggio R, centrata nell'origine e appartenente al piano Oyz.

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per il nuovo sistema; si determinino due costanti del moto indipendenti.

(3B) Si risolvano le eq. del moto, utilizzando (laddove necessario) il metodo per quadrature.

(3C) Detto T_y il periodo di oscillazione di P e T_x il periodo di oscillazione della proiezione del disco ~~sull'asse~~ sul piano Oxz, si verifichi che $\forall$ valore (preso grande a piacere) di un parametro $B>0$, $\exists$ piccole oscillazioni attorno a un p.to di equilibrio stabile t.c. $T_y/T_x > B$.

(3A) Il nuovo vincolo equivale a imporre che

$$y_C = y_P \Rightarrow \eta = R\sin\alpha .$$

Imponendo quest'ultima relazione e $l=0$, otteniamo la nuova Lagrangiana

$$L(\alpha, x, R\sin\alpha, \dot{\alpha}, \dot{x}, R\dot{\alpha}\cos\alpha)\Big|_{l=0} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2\alpha + \frac{3M}{4}\dot{x}^2$$

$$+ mgR\cos\alpha - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k R^2 \sin^2\alpha$$

Di conseguenza i momenti coniugati, rispettivamente ad α e x, saranno

$$p_\alpha = (m + M\cos^2\alpha) R^2 \dot{\alpha} \qquad p_x = \frac{3}{2} M \dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{(m + M\cos^2\alpha) R^2} \qquad \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{\frac{3}{2} M} .$$

Per quanto riguarda il moto in α, il coefficiente

$$\mu(\alpha) = (m + M\cos^2\alpha) R^2 > 0$$

gioca il ruolo di "massa variabile". Si ricava quindi che l'energia cinetica, espressa in funzione dei momenti, assume la forma seguente:

$$T = \frac{p_\alpha^2}{2(m + M\cos^2\alpha) R^2} + \frac{p_x^2}{3M} \cancel{- mgR\cos\alpha - \frac{1}{2} k R^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{2} k x^2}$$

Otteniamo quindi che la Hamiltoniana del nuovo sistema si scrive

$$H(p_\alpha, p_x, \alpha, x) = \frac{p_\alpha^2}{2\mu(\alpha)} - mgR\cos\alpha - \frac{1}{2}kR^2\sin^2\alpha$$
$$+ \frac{p_x^2}{3M} + \frac{1}{2}kx^2 .$$

Dalla formula precedente, si nota che i termini in (p_α, α) sono disaccoppiati rispetto a quelli in (p_x, x).

Ciò è ancora più evidente nelle eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{p_\alpha^2 \mu'(\alpha)}{2[\mu(\alpha)]^2} - mgR\sin\alpha + kR^2\sin\alpha\cos\alpha \\ \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{\mu(\alpha)} \\ \dot{p}_x = -kx \\ \dot{x} = \frac{2p_x}{3M} \end{cases}$$

Si nota immediatamente che le 2 eq. al di sopra di questa linea tratteggiata sono disaccoppiate rispetto a quelle che stanno al di sotto.

Siccome le eq. di Hamilton sono disaccoppiate, allora si conservano le due energie (indipendenti)

$$E_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2\mu(\alpha)} - mgR\cos\alpha - \frac{1}{2}kR^2\sin^2\alpha ,$$

$$E_x = \frac{p_x^2}{3M} + \frac{1}{2}kx^2 .$$

(3B) Dalla 2ª coppia di eq. di Hamilton si ricava

$$\dot{p}_x = \frac{3M}{2}\ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$, cioè l'eq. dell'oscillatore armonico, quindi

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$ con A e φ determinati dalle cond. iniz.

Ovviamente

$$p_x(t) = \frac{3M}{2}\dot{x} = -\frac{3M\omega}{2}A\sin(\omega t + \varphi).$$

Per quanto riguarda la prima coppia di eq. è conveniente utilizzare la legge di conservazione dell'energia:

$$E_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2\mu(\alpha)} - mgR\cos\alpha - \frac{1}{2}kR^2\sin^2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\alpha)\dot{\alpha}^2 - mgR\cos\alpha - \frac{1}{2}kR^2\sin^2\alpha$$

Si procede quindi come al solito, per ottenere (con il metodo delle quadrature):

$$t - t_0 = \pm\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\psi)}\left(E_\alpha + mgR\cos\psi + \frac{1}{2}kR^2\sin^2\psi\right)}}$$

L'eq. precedente, tramite il calcolo di un integrale e l'inversione di una funzione, ci fornisce la legge del moto

$$t \mapsto \alpha(t)$$

da cui si ricava anche

$$t \mapsto p_\alpha(t) = \mu(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) .$$

(3C) Il periodo di oscillazione del disco è

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} ,$$

che non dipende dall'ampiezza di oscillazione perché è dato dalla soluzione di un'equazione del tipo dell'oscillatore armonico.

Per quanto riguarda le piccole oscillazioni di θ, l'approccio più semplice consiste nel partire dall'approssimazione quadratica in (p_α, α) sviluppata attorno a $(0,0)$ che è evidentemente una sol. di equilibrio.

Otteniamo quindi $H_\alpha(p_\alpha, \alpha) \simeq \dfrac{p_\alpha^2}{2\mu(0)} + mgR\dfrac{\alpha^2}{2} - \dfrac{kR^2}{2}\alpha^2 - mgR$

dove ~~sono~~ non state messe inessenziali costanti additive
Quando $mg > kR$, abbiamo che la parte potenziale è quella di un oscillatore armonico di costante elastica

$$mgR - kR^2.$$

Inoltre dalla parte cinetica, si deduce che $\mu(0)$ è l'analogo della massa dell'oscillatore armonico, quindi nel limite di piccole oscillazioni abbiamo che

$$\lim_{E_\alpha \to -mgR^+} T_y = 2\pi \sqrt{\frac{\mu(0)}{mgR - kR^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{\frac{mg}{R} - k}} .$$

Linearizzando le eq. di Lagrange, oppure utilizzando il teorema delle piccole oscillazioni per la sola dinamica in α, avremmo ottenuto lo stesso risultato.
$\forall B > 0$, basta quindi considerare valori dei parametri tali per cui $mg = kR + \frac{(m+M)R}{B^2} \cdot \frac{3M}{k}$, si ottiene quindi che

$$\lim_{E_\alpha \to -mgR^+} T_y / T_x = \sqrt{2}\, B,$$